

ЛЕКЦИИ

математический

Анализ

(3 семестр)

Семенова

Дарья

группа 205

2019-2020

Теория числовых рядов.

§1. Понятие числового ряда и его сходимости

$$\{a_n\} \subset \mathbb{R} \mapsto a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1) - \text{числовой ряд}$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k - n\text{-ая частичная сумма}$$

Определение: ряд (1) сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. S - сумма ряда (1). Если $\nexists \lim \Rightarrow$ (1) расходится.
 $\exists \lim S_n \equiv S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N: |S_n - S| < \varepsilon$. $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n$ - n -ый остаток ряда.
! сходимость ряда $\Leftrightarrow r_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Пример 1: $\exists q: |q| < 1: 1 + \dots + q^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$; $S_n = 1 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow \frac{1}{1-q} = S$

Если $q = 1$, то $S_n = n$
Если $q = -1$, то $S_n: 1, 0, 1, 0, \dots$
Если $|q| > 1$, то $S_n \rightarrow \infty$

} ряд расходится

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$
сх-ст: $|q| < 1$
расх-ст: $|q| \geq 1$

Пример 2: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$; $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; $S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \equiv S$

Пример 3: $\exists x \in \mathbb{R}: 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x$;
Формула Маклорена: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$, где $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}$, $\theta \in (0, 1): |e^x - S_{n+1}| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \leq \begin{cases} \frac{e^x}{(n+1)!}, x \geq 0 \\ \frac{1}{(n+1)!}, x < 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow e^x - S_{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда)

Ряд (1) сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$

Доказательство:

переформулировка критерия Коши для $\{S_n\}$.

1 Следствие (необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (общий член ряда стремится к нулю)

(2)

Доказательство:

(Т. 1 $\Rightarrow$) $p=1: \forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N: |a_{n+1}| < \varepsilon$

Пример 4: Условие (2), вообще говоря, не является достаточным для сходимости (1): $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ (гармонический ряд)

Итак: $\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$; Критерий Коши (отрицание), $n=N, p=N \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ряд расходится

2 Следствие:

Исключение из ряда (1) $\forall$ конечного числа слагаемых не влияет на его сходимость (только лишь может изменить его сумму)

3 Следствие:

Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ ($c \neq 0$) сходятся и расходятся одновременно.

§2. Ряды с неотрицательными слагаемыми.

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, $p_k \geq 0 \quad \forall k$ (3) ! $S_{n+1} = S_n + p_{n+1} \geq S_n \Rightarrow \{S_n\}$ - монотонная неубывающая посл-ть

Теорема 1: ряд (3) сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ ограничена (сверху)

Доказательство:

$\Rightarrow$ $\forall$ сходящаяся посл-ть ограничена

$\Leftarrow$ посл-ть частичных сумм не убывает $\Rightarrow$ для с-ти достаточно чтобы $\{S_n\}$ была ограничена

1° Признаки сравнения

Теорема 2: (1-й признак сходимости)

$\exists$ имеется 2 ряда с неотрицательными слагаемыми $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$. $\forall k \geq 1: p_k \leq p'_k$. Тогда

- 1) из сходимости 2-го ряда следует сходимость 1-го ряда;
- 2) из расходимости 1-го ряда следует расходимость 2-го ряда;

Доказательство:

Для частичных сумм выполнено: $\sum_{k=1}^n p_k = S_n \leq S'_n = \sum_{k=1}^n p'_k$

Если 2ой ряд сходится, то $\{S'_n\}$ ограничена сверху $\Rightarrow \{S_n\}$ ограничена сверху (т.1)
 $\Rightarrow$ 1ый ряд сходится.

Если 1ый ряд расходится, то $S_n \rightarrow +\infty \Rightarrow S'_n \rightarrow +\infty$.

Замечание к т.2:

- 1) В т.2 можно требовать выполнение неравенств $p_k \leq p'_k$ лишь начиная с некоторого k ;
- 2) Неравенство $p_k \leq p'_k$ можно заменить на более общее: $p_k \leq c \cdot p'_k$ ($c > 0$) $\forall k \geq k_0$, $p_k = O(p'_k)$

Теорема 3: (2-ой признак сходимости) (признак сравнения в предельной форме)

$\exists$ для рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ с неотрицательными членами, начиная с некоторых номеров p_k, p'_k положительны. Тогда, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L \neq 0$, то эти 2 ряда сх-ся и расх-ся одновременно.

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \forall k \geq N: \left| \frac{p_k}{p'_k} - L \right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon \Leftrightarrow (L - \varepsilon) \cdot p'_k < p_k < (L + \varepsilon) p'_k$$

$$\exists (L - \varepsilon) = c_1, (L + \varepsilon) = c_2$$

- 1) $c_1 \cdot p'_k < p_k$ - p'_k сходится по п.2 замечание к т.2
- 2) $p_k < c_2 \cdot p'_k$ - p'_k расходится по п.2 замечание к т.2

Теорема 4: (3-ий признак сходимости)

$\exists$ для рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ с неотрицательными членами, начиная с некоторых номеров p_k, p'_k положительны. Тогда, если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}, \forall k \geq k_0$, то

- 1) из сходимости 2-го ряда следует сходимость 1-го ряда;
- 2) из расходимости 1-го ряда следует расходимость 2-го ряда;

Доказательство:

Перемножим их почленно для $k = k_0, k_0+1, \dots, n$:
 $\Rightarrow p_{n+1} \leq \left(\frac{p_{k_0}}{p'_{k_0}} \right) p'_{n+1}$

Пример 1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

- а) при $\alpha = 1$ - расходится (гармонический ряд)
- б) при $\alpha \leq 0$ - расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости
- в) при $0 < \alpha < 1$: $\left(\frac{1}{k}\right)^\alpha \geq \frac{1}{k} \Rightarrow$ расходится (1 признак сх-ти)
- г) при $\alpha = 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad \forall k \geq 2, \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ сходится
 $\Rightarrow \sum \frac{1}{k^2}$ сходится
- д) при $\alpha > 2$: $\left(\frac{1}{k}\right)^\alpha \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow$ ряд сх-ся (1 признак сх-ти)
- е) при $\alpha \in (1, 2)$?

о частичных суммах гармонического ряда

Пример 2: $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (H_n \rightarrow +\infty)$

$$а) \ln(1+x) < x, \forall x > 0; \quad (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \Big|_{x=0} = 1$$

$$б) x = \frac{1}{k}, 0 < \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \leq \left(\frac{1}{2} + 1\right) \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \text{ - сходится}$$

$$H_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sigma + O(1) + \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n}$$

$$в) H_n = \sigma + \ln(n+1) + O(1) = \sigma + (\ln(n+1) - \ln n) + \ln n + O(1) = \sigma + \ln n + O(1)$$

$\sigma \approx 0,577 \dots$ - константа Эйлера-Маскерони

2° Признаки Коши и Даламбера

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geq 0 \quad (*)$$

Теорема 1: (признак Коши)

- I. Если $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1, \forall k \geq k_0$, то (*) сх-ся. Если $\sqrt[k]{p_k} \geq 1$, то расходится.
 II. Пусть $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$. Тогда: если $L < 1$, то (*) сх-ся, если $L > 1$, то (*) расходится.

Доказательство:

- I. $p_k \leq q^k, q < 1$, а $\sum q^k$ сходится (S_n ограничена)
 $p_k \geq 1$ — расходится (необходимое условие сх-ти)
 II. $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall k \geq N: |\sqrt[k]{p_k} - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$
 Если $L < 1$, то $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-L) \Rightarrow L + \varepsilon < 1 \Rightarrow \sqrt[k]{p_k} < 1 \Rightarrow$ сходится (I)
 Если $L > 1$, то $\varepsilon = \frac{1}{2}(L-1): \sqrt[k]{p_k} > L - \frac{1}{2}(L-1) > 1 \Rightarrow$ расходится

Замечание 1: Если $L = 1$, то $p_k = \frac{1}{k}$ — ряд расходится или $p_k = \frac{1}{k^2}$ — ряд сходится.

Замечание 2: Условие в части II можно заменить на $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k}$. Признак останется справедливым, т.к. неравенство $\sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$ нарушается на конечном числе точек.

Если $L > 1$, то $\exists n_k: \sqrt[n_k]{p_{n_k}} \rightarrow L. L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{p_{n_k}} < L + \varepsilon, \varepsilon = \frac{1}{2}(L-1)$

Для этой под-ти нарушается необходимое условие сх-ти ряда.

Теорема 2: (признак Даламбера) $\exists \forall k \geq k_0: p_k > 0$

- I. Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$, то ряд (*) сходится. Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$, то ряд расходится.
 II. Пусть $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$. Если $L < 1$, то (*) сх-ся. Если $L > 1$, то (*) расх-ся.

Доказательство:

- I. Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q = \frac{q_{k+1}}{q_k}$, то (3-ий признак сх-ти), т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сх-ся $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся.
 Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \forall k \geq k_1$, то $p_{k+1} \geq p_k \geq p_{k_1} > 0 \Rightarrow$ нарушаются необх. условия сх-ти $\Rightarrow$ расходится.
 II. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall k \geq N: L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$
 При выборе $\varepsilon = \frac{1}{2}(L-1)$. Далее рассуждения аналогично т.1 (II)

Замечание 1: случай $L = 1$: признак не дает однозначного ответа.

Замечание 2: Можно использовать $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k}$

Замечание 3: случай $L = 1$ можно проанализировать с помощью более "точных" признаков сх-ти

Пример 1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^k}{2^{k+1}}$, I. признак Даламбера: $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{3+(-1)^{k+1}}{2^{k+2}} \cdot \frac{2^{k+1}}{3+(-1)^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{k+1}}{3+(-1)^k}$

$k=2\ell: \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}, k=2\ell+1: \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} = 1, L=1 \Rightarrow$ признак Даламбера не работает.

II. Признак Коши: $\sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{2} \sqrt[k]{\frac{3+(-1)^k}{2}}$ $k=2\ell: \frac{1}{2} \sqrt[2\ell]{1} = \frac{1}{2}; k=2\ell+1: \frac{1}{2} \sqrt[2\ell+1]{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow L = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ряд сходится

Утверждение: Если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$, то $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$

Доказательство: $\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\frac{p_k}{p_{k-1}} \cdot \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1}, \exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = L$

Чтобы доказать требуемое, необходимо показать, что если $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = L$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k \cdot b_{k-1} \cdot \dots \cdot b_1} = L$.

Или, что то же самое, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln b_k = \ln L$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (\ln b_k + \dots + \ln b_1) = \ln L$.

Итак, докажем, что если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = A: \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - A = \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_n - A)}{n} = \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_{n-1} - A) + (a_n - A)}{n}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N: \left| \frac{(a_n - A) + \dots + (a_n - A)}{n} \right| < \varepsilon \cdot \frac{(n - N + 1)}{n} \leq \varepsilon$

Обозначим $\max \{|a_1 - A|, \dots, |a_{N-1} - A|\} = C$. Тогда $\left| \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_{N-1} - A)}{n} \right| \leq \frac{C \cdot (N-1)}{n} < \varepsilon$, если $n > \frac{C \cdot (N-1)}{\varepsilon}$

Тогда разность $< 2\varepsilon$.

Задача: Дополнить приведенное доказательство доказательством в случаях $L = 0$ и $L = +\infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, 1 < \alpha < 2$$

3° Признак Коши-Маклорена

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ (*), $p_k \geq 0$.

Теорема:

Пусть $\exists$ неотрицательная ф-ия $f(x)$, определенная и монотонно невозрастающая на $[1, +\infty)$ для которой $f(k) = p_k$, $\forall k$. Тогда сходимость/расходимость (*) $\Leftrightarrow$ сходимость/расходимость $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

Доказательство:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [k, k+1]: f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) \Rightarrow f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1), k=1, \dots, n-1 (n \geq 2)$$

$$\underbrace{f(1) + \dots + f(n-1)}_{S_{n-1}} \geq \int_1^n f(x) dx \geq \underbrace{f(2) + \dots + f(n)}_{S_{n-p_1}} \Rightarrow S_{n-p_1} \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_{n-1}$$

Если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то $\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq M \Rightarrow S_n \leq M + p_1 \Rightarrow (*)$ сходится

Если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то $(f(x) \geq 0) \int_1^{+\infty} f(x) dx \rightarrow +\infty \Rightarrow S_{n-1} \rightarrow +\infty$

Замечание: Если $p_k = \frac{1}{k^\alpha}$, $1 < \alpha < 2$, то $f(x) = x^{-\alpha}$. $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}$

§3. О перестановке слагаемых сходящейся последовательности.

Пример 1: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Рассмотрим $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k(2k-1)}$ - имеет предел A . $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$ ($A = \ln 2$)

Пример 2: переставить слагаемые в этом ряде так, чтобы он сходил к A .

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C_3 + o_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} o_n = 0$, C_3 - постоянная Эйлера

$\sum_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = S_{2n} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = S_{2n} - S_n = \ln 2n + C_3 + o_{2n} - (\ln n + C_3 + o_n) = \ln 2 + o_{2n} - o_n \rightarrow \ln 2$

Представим так:

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{3}{2} \ln 2$

$\sum_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = S_{4n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = S_{4n} - \frac{1}{2} S_{2n} - \frac{1}{2} S_n =$

$= \ln \frac{4n}{2n} + o_{4n} - o_{2n} - o_n \rightarrow \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2$; $\sum_{3n+1} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2$, $\sum_{2n+2} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2$

Переместительные свойства, абсолютная сходимость

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Определение 1: (1) - абсолютно сходящийся, если (2) сходится

Утверждение 1: Абсолютно сходящийся ряд сходится

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1$ сходится по критерию Коши.

Определение 2: Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, тогда ряд (2) ка-ся условно сходящийся

Теорема Рундана: Если (1) сходится условно, то $\forall L \in \mathbb{R}$, либо $L = +\infty$, либо $L = -\infty$ можно как переставить члены ряда (1), что частичные суммы нового ряда будут сходить к L .

Доказательство:

Считаем, что $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ - все положит. члены ряда (1) взятые в порядке появления в (1). $q_1, \dots, q_r$ - модули отрицательных членов ряда (1) взятые в порядке их появления в (1).

S_n^p - сумма положит. членов (1) среди первых n членов.

S_n^q - сумма модулей отрицательных членов (1) среди первых n членов.

$\Rightarrow S_n^p - S_n^q = a_1 + \dots + a_n \rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left| \oplus \Rightarrow 2 S_n^p \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \text{положит. членов } \infty \text{ много} \right.$
 $S_n^p + S_n^q = |a_1| + \dots + |a_n| \rightarrow +\infty \quad \left| \ominus \Rightarrow 2 S_n^q \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q_n - \text{отриц. членов } \infty \text{ много} \right.$

а) положительных членов (1) ∞ много, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ - расходится
 отрицательных членов (1) ∞ много, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ - расходится

б) $p_n \rightarrow 0, q_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ (т.к. $a_n \rightarrow 0$ - необходимое условие сходимости)

1. $L \in \mathbb{R}$. Можно считать, что $L \geq 0$ (иначе $b_n = -a_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k)$, переставим по член так, чтобы он сошел к L , далее все члены нового ряда $\cdot (-1)$)

Пусть $n_1 \in \mathbb{N}: p_1 + \dots + p_{n_1-1} < L, p_1 + \dots + p_{n_1} \geq L$ (если $p_1 \geq L$, то $n_1 = 1$)

Пусть $m_1 \in \mathbb{N}: p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1-1} \geq L, p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} < L$ (если $p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 < L$, то $m_1 = 1$)

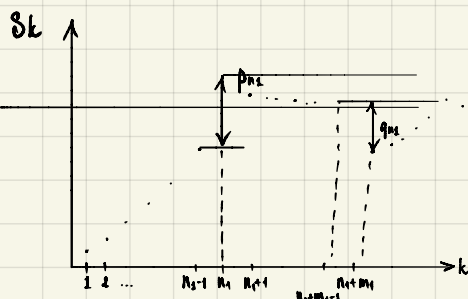
$n_2 > n_1$ - минимальный: $p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2} \geq L$

$m_2 > m_1$ - минимальный: $p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2} - q_{m_1+1} - \dots - q_{m_2} < L$ и.т.д.

По построению модуль $|S'_n - L|$ не превосходит последнего члена последней из завершённых групп, $p_{n_k} \rightarrow 0, q_{m_k} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim |S'_n - L| = 0$

2. $L = +\infty$ (аналогично $= -\infty$)

$n_1: p_1 + \dots + p_{n_1} > 1 + q_1; \quad n_2: p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2} > 2 + q_2$



Теорема Коши (о переместительном св-ве абсол. сходя. ряда)

Пусть (1) с-ся абсолютно, (1') $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ — ряд, полученный из (1) произвольной перестановкой членов.

Тогда (1') с-ся абсолютно и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'$

Доказательство:

1) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, покажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = S$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n \geq N_1: |a_1 + \dots + a_n - S| < \varepsilon/2$$

(1) с-ся абсолютно $\Rightarrow$ по критерию Коши $\exists N_2: \forall n \geq N_2 \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon/2$, $N_3 = \max \{N_1, N_2\}$

$\exists N$: среди $a_1, \dots, a_N$ содержатся $a_1, \dots, a_{N_3}$

$$n \geq N: |a_1' + \dots + a_n' - S| = |a_1 + \dots + a_{N_3} - S + \text{остаточный член}| \leq \underbrace{|a_1 + \dots + a_{N_3} - S|}_{< \varepsilon/2} + |\text{оставшиеся}|$$

(оставшиеся — конечное число членов (1) с номерами $> N_3 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$: оставшиеся содержатся среди $a_{N_3+1}, \dots, a_{N_3+p}$)

$$|\text{оставшиеся}| \leq |a_{N_3+1}| + \dots + |a_{N_3+p}| < \varepsilon/2 \Rightarrow |a_1' + \dots + a_n' - S| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n' = S$$

Проводя аналогичные рассуждения с рядами $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n'|$, получаем, что (1') с-ся абсол.

Признаки сходимости рядов с членами произвольного знака.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k \Rightarrow a_n = S_n^a - S_{n-1}^a, n \geq 2$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k^a - S_{k-1}^a) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k^a b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}^a b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k^a b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k^a b_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k^a (b_k - b_{k+1}) + S_{n+p}^a b_{n+p} - S_n^a b_{n+1}$$

$$\text{Преобразование Абеля: } \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k^a (b_k - b_{k+1}) + S_{n+p}^a b_{n+p} - S_n^a b_{n+1}$$

Последовательности с ограниченным уменьшением и их св-ва.

Определение: $\{b_n\}$ — посл-ть с ограниченным уменьшением, если $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ сходится

Утверждение: Последовательность с ограниченным уменьшением сходится.

Доказательство:

$$\text{Абсолютно сходящийся ряд сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \text{ сходится (к некоторому } S) \Rightarrow \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \rightarrow S \Rightarrow b_{n+1} \rightarrow b_1 - S$$

Пример сходящейся посл-ти, не являющейся последовательностью с огранич. уменьшением:

$$0 < b_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow |b_n - b_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится}$$

Утверждение: Если $\{b_n\}$ монотонна и ограничена $\Rightarrow \{b_n\}$ — последовательность с огранич. уменьшением

Доказательство:

Монотонная и ограниченная посл-ть сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

$$|b_n - b_{n+1}| = \begin{cases} b_n - b_{n+1}, & \{b_n\} \text{ не возрастающая} \\ b_{n+1} - b_n, & \{b_n\} \text{ не убывающая} \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^n |b_k - b_{k+1}| = \begin{cases} b_1 - b_{n+1} \rightarrow b_1 - b, & \{b_n\} \text{ не возрастающая} \\ b_{n+1} - b_1 \rightarrow b - b_1, & \{b_n\} \text{ не убывающая} \end{cases}$$

Задача к экзамену:

Показать, что $\forall$ последовательность с ограниченным уменьшением представима в виде суммы 2-х монотонных ограниченных последовательностей

1. 1-й признак Абеля

Пусть $\{S_n^a\}$ ограничена, $\{b_n\}$ - последовательность с огранич. уменьшением, $b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
 Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство:

$\exists M > 0: |S_n^a| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, b_n \rightarrow 0 \Rightarrow \exists N_1: |b_n| < \frac{\varepsilon}{3M}, n \geq N_1$.
 $\{b_k\}$ - посл-ть с стр. уменьшением $\Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{3M}$
 $N = \max\{N_1, N_2\}. \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n > N: (из предположений Абеля):$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k^a| |b_k - b_{k+1}| + |S_{n+p}^a| \cdot |b_{n+p}| + |S_n^a| \cdot |b_{n+1}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$$

 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится по Критерию Коши

2. 2-ой признак Абеля

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, $\{b_n\}$ - посл-ть с огранич. уменьшением.
 Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство:

$\{b_n\}$ сходится, т.к. уб-ся посл-тью с огранич. уменьшением, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $b_n' = b_n - b \Rightarrow b_n' - b_{n+1}' = b_n - b_{n+1} \Rightarrow \{b_n'\}$ - посл-ть с огранич. уменьшением, $b_n' \rightarrow 0$.
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow \{S_n^a\}$ ограничена $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится (по 1-му признаку Абеля)
 и $\sum_{n=1}^{\infty} b a_n = b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n' + a_n b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n' + b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

3. Признак Дирихле - Абеля

Для сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ достаточно выполнение одной из двух пар условий:

- I. $\{S_n^a\}$ - ограничена, $\{b_n\}$ - монотонно сходится к 0 ($\Rightarrow$ из 1-го признака Абеля)
- II. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $\{b_n\}$ - монотонная и ограниченная посл-ть ($\Rightarrow$ из 2-го признака Абеля)

Задача для экзамена

Пусть $\{b_n\}$ - такая, что для $\forall$ эк-ей ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.
 Доказать, что $\{b_n\}$ - последовательность с огранич. уменьш.

Следствие: (Признак Лейбница)

$\exists \{p_n\}$ - невозрастающая, $p_n \rightarrow 0$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n$ сходится.

Доказательство:

$a_n = (-1)^{n+1}$. Тогда $S_n^a = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{нечётное} \\ 0, & \text{если } n - \text{чётное} \end{cases} \Rightarrow \{S_n^a\} \text{ ограничена} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n \text{ эк-ей по I пр. Д.-А.}$

$S_{2n} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \dots + (p_{2n-1} - p_{2n})$, S_{2n} неубывает

$S_{2n} = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 - \dots - (p_{2n-1} - p_{2n}) - p_{2n} \leq p_1 \Rightarrow \{S_{2n}\}$ - ограничена $\Rightarrow \{S_{2n}\} \rightarrow S$

$\Rightarrow S_{2n} + p_{2n+1} \rightarrow S$

Задача для экзамена

$p_n > 0, p_n \rightarrow 0$. Верно ли, что $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n$ сходится?

Пример: Исследовать на абсолютную и условную сходимость (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{x}$

• $x = 2\pi k \Rightarrow$ (1) $\sum 0$ - с.с. абсолютно, (2) $\sum \frac{1}{n}$ - расходится

• $x \neq 2\pi k$: $S_n^1 = \sum_{k=1}^n \sin kx$, $S_n^2 = \sum_{k=1}^n \cos kx \rightarrow S_n^1 = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} \cdot \sum_{k=1}^n 2 \sin kx \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} \cdot \sum_{k=1}^n (\cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x) =$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot (\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{5x}{2} - \dots + \cos(n-\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})x) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} (\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x)$$

$$S_n^2 = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \sum_{k=1}^n 2 \cos kx \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \sum_{k=1}^n (\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x)$$

$$S_n^1 = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} (\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x); S_n^2 = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} (\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}) \Rightarrow |S_n^1| \leq \frac{1}{2 |\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}; |S_n^2| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} - \text{огранич. в совокупности}$$

$b_n = \frac{1}{n} \downarrow 0 \Rightarrow$ оба ряда с.с. по I Д.А.

Абсолютная сходимость:

• $x = \pi n$: $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\sin nx}{x}| = \sum 0$ - сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\cos nx}{x}| = \sum \frac{1}{n}$ - расходится

• $x \neq \pi n$: $|\frac{\sin nx}{n}| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ - гармонический расходится; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ - с.с., т.к. $2x \neq 2\pi k \Rightarrow$ расходится - сходится $\Rightarrow$ расход. $\Rightarrow$ (1) с.с. условно

Аналогично (2) абсолютно рас.с. $\Rightarrow$ с.с. условно (2)

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$: • $p \leq 0, a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд расходится

• $p > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^p} \downarrow 0 \Rightarrow$ ряд сходится по кр. Лейбница

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится $\Leftrightarrow p > 1$, т.е. $p > 1$ - сходится абсолютно, $p \in (0, 1)$ - сходится условно

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \arctg n^5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ с.с. ($p = \frac{1}{2}$ в м.е.), $\arctg n^5 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$ - л.м. о.ч. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ с.с. по II Д.А.

! Для не знакопостоянных рядов НЕЛЬЗЯ использовать признак сравнения!

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ - сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ - расходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right) = 1 \Rightarrow \text{ряды эквивалентны}$$

§5.

Арифметические действия над сходящимися рядами.

Теорема 1: Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ сходится к $U \pm V$, где U и V — суммы этих рядов.

Доказательство: $S_n = \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow U$ $G_n = \sum_{k=1}^n v_k \rightarrow V$ $\rightarrow \sum (u_k \pm v_k) = S_n \pm G_n \rightarrow U \pm V$

Вопрос о произведении рядов:

$$(a_1 + \dots + a_n) \cdot (b_1 + \dots + b_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j, \quad u_i v_j, \quad i, j \in \mathbb{N} \rightarrow \begin{vmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & \dots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Теорема 2: Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся к своим суммам U и V .

Тогда ряд, составленный из произведений $u_i v_j$ занумерованных в $\forall$ порядке, также абсолютно сходится к UV .

Доказательство: $u_i v_j$, где $i, j = 1, 2, \dots$ занумерованный в каком-либо порядке: результатом $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ Докажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ сходится.

Рассмотрим частичн. сумму этого ряда: $W_n = \sum_{k=1}^n |w_k|$, где $w_k = u_{i(k)} v_{j(k)}$ (пусть $\max_{1 \leq k \leq n} i(k) = i_0$, $\max_{1 \leq k \leq n} j(k) = j_0$) $W_n \leq \sum_{i=1}^{i_0} |u_i| \cdot \sum_{j=1}^{j_0} |v_j| \leq M_0 \quad \forall i_0, j_0$ (в силу абс. сходимости рядов) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ сходим. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} w_k$ сходим и сумма не меняется при перенум.

Изменить порядок нумерации слагаемых $w_k = u_i v_j$ на: "По квадратам"

Частичные суммы этого ряда с нумерацией $n = m^2$ равны: $(\sum_{i=1}^m u_i) (\sum_{j=1}^m v_j) \rightarrow U \cdot V$

Т.к. все возможные частичные суммы сходятся, то ее предел $= U \cdot V$

Пример 1: $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сс-ся, Эenumerация $\sum u_i v_j$, при которой ряд рас-ся. $\sum u_i v_j = w_1 + (\dots) + (\dots) + \dots$ $n=2, 3, \dots: w_n = u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \dots + u_{n-1} v_1 = \frac{(-1)^1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{1}} = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{1}} \right) \geq \frac{n-1}{(\sqrt{n-1})^2} = 1$ $\Rightarrow W_n = \sum_{k=1}^n w_k$ — расходится (*) нумерация по Коши

(из условия т.2 нельзя сделать факт абсолютной сс-ти рядов $\sum u_n, \sum v_n$)

Теорема 3: Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сс-ся абсолютно, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится (условно). Тогда ряд $\sum w_k$, составленный из сумм произведений по правилу Коши (*) сходится и его сумма равна $U \cdot V$.

Доказательство: $W_n = \sum w_k = u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1) = u_1 V_{n-1} + u_2 V_{n-2} + \dots + u_n V_1 \ominus$ $(V_n = V + \alpha_n, \alpha_n \rightarrow 0) \ominus u_1 (V + \alpha_{n-1}) + u_2 (V + \alpha_{n-2}) + \dots + u_{n-1} (V + \alpha_1) = V (u_1 + \dots + u_{n-1}) + \overbrace{u_1 \alpha_{n-1} + \dots + u_{n-1} \alpha_1}^{\delta_n}$

Докажем, что $u_1 \alpha_{n-1} + u_2 \alpha_{n-2} + \dots + u_{n-1} \alpha_1$ — бесконечно малая.

$\forall m: 1 \leq m \leq n-1: (u_1 \alpha_{n-1} + \dots + u_m \alpha_{n-m}) + (u_{m+1} \alpha_{n-1-m} + \dots + u_{n-1} \alpha_1)$, где $\{\alpha_i\}$ — д.м. и $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$ — сс-ся абсолютно

Пусть $c > 0$ такая, что $|\alpha_i| \leq c, \forall i, \sum_{j=1}^N |u_j| \leq c \quad \forall N$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ (начиная со 2-ой суммы) выберем $m = m(\varepsilon): \sum_{k=m}^N |u_k| < \varepsilon \quad \forall N$.

По $m = m(\varepsilon)$ выберем $n = n(\varepsilon): |\alpha_i| < \varepsilon \quad \forall i \geq n(\varepsilon) - m(\varepsilon)$ (для 1-й суммы).

Тогда $| \dots | < (|u_1| \cdot \varepsilon + \dots + |u_m| \cdot \varepsilon) + (|u_{m+1}| \cdot c + |u_{m+2}| \cdot c + \dots + |u_{n-1}| \cdot c) \leq 2 \cdot c \varepsilon = \varepsilon_1$

§6. Бесконечные произведения

$\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ формально: $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n = \prod_{k=1}^n v_k$ (1)

$P_n = \prod_{k=1}^n v_k$ — n-ое частичное произведение

Определение: (1) сходится к P , если 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$, 2) $P \neq 0$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$, то (1) расходится к нулю. В дальнейшем считаем, что $v_k \neq 0, \forall k$.

Теорема 1: Если (1) сходится, то $v_k \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$

Доказательство: $P_n / P_{n+1} = v_{n+1} \rightarrow P/P = 1$

Будем далее считать, что все $v_k > 0$. Действительно, если (1) сх-ся, то $v_k \rightarrow 1$ и начиная с некоторого $k_0, v_k > 0, k \geq k_0$. Отбрасывание конечного числа сомножителей в (1) не влияет на сх-ть.

Теорема 2: (1) сходится к $P \Leftrightarrow \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k \text{ сходится к } \ln P$.

Доказательство: (1) $\leadsto P_n = \prod_{k=1}^n v_k, \sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k \leadsto S_n = \sum_{k=1}^n \ln v_k. S_n = \ln P_n, P_n = e^{S_n}, \ln$ и e^t непр.

Пример 1: $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \left(\dots \sin \frac{x}{2^n} \right) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{x}{2^{n-1}} \right) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \left(\frac{1}{2^n} \sin x \right) = \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

Пример 2: Формула Валисы: $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{2}$

Теорема 3: Если все $v_k = 1 + u_k$ (начиная с некоторого номера) больше 1, то $\prod_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Доказательство: $v_k = 1 + u_k, u_k \rightarrow 0$. Если $u_k > 0$, начиная с некоторого номера k , то рассматриваемый ряд состоит из положительных слагаемых ($\ln(1+u_k) > 0$).
 $\prod_{k=1}^{\infty} v_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k. \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \Leftrightarrow$ сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Пример 3: $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \right)$ (докажем, что расходится).
 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} + o \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k^{3/2}} \right) \right) \Big|_{1, x} \left(\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} o \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k^{3/2}} \right) \Rightarrow \text{расх}$

Теорема 4: Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится. Тогда произведение $\prod_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2$

Доказательство: $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k), u_k \rightarrow 0$.

$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2), t \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(1+u_k) = u_k - \frac{1}{2}u_k^2 + o(u_k^2) = u_k - \frac{1}{2}u_k^2(1+o(1))$

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 (1+o(1)), (1+o(1)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \forall k \geq k_0: 1+o(1) \geq \frac{1}{2}$ (с какою-то моментом ряд с неотриц. слагаемыми)
 $\Rightarrow u_k^2(1+o(1)) \sim u_k^2$

§7.

Элементы теории двойных рядов

Бесконечная матрица $a_{kl} \in \mathbb{R}, k, l \geq 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Определение: Двойной ряд - формально $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ (1)
 Это частичные суммы $S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl}$

Определение: Ряд (1) сходится к S , если $\{S_{mn}\} \rightarrow S$ при независимом стремлении $m, n \rightarrow \infty$.
 Т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \forall n, m \geq N: |S - S_{mn}| < \varepsilon$.

Повторные ряды:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}$ сходится при $\forall k, A_k$. Если $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, то говорят: $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ (2) сходится.

Теорема 1: Если ряд (1) сходится, то $a_{kl} \rightarrow 0$ при независимом стремлении $k, l \rightarrow \infty$.

Доказательство: $S_{kl} - S_{k-1, l-1} = S_{k, l-1} - S_{k-1, l-1}$ при $k \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty \Rightarrow a_{kl} \rightarrow 0$



Пример 1: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

Пример 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & \dots \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & \dots \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$S_{mn} = \begin{cases} 0, \text{ если } n, \text{ либо } m - \text{чётные} \\ 1/m, \text{ если } m, n \text{ нечётные } (m=2m_0-1) \end{cases}$
 $S_{mn} \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$

Двойной ряд сходится к 0.
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}$ расходится $\forall k, \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ - расх.
 $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = \begin{cases} 0, l - \text{чётное} \\ 0, l - \text{нечётное} \end{cases} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}$ - сход к 0.

Теорема 2: (о связи м/д сходимостью двойного и повторного рядов)

Пусть двойной ряд (1) сходится, и кроме того, сходится все "строки" рядов $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$.
 Тогда повторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ сходится, причём к сумме двойного ряда.

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall n, m \geq N: |S - S_{mn}| < \varepsilon$ или $|S - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl}| < \varepsilon$
 При $n \rightarrow \infty: |S - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}| \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится к S .

Теорема 3: Рассмотрим двойной ряд (1) с неотриц. слагаемыми $a_{kl} > 0, \forall k, l$.

В этом случае двойной ряд сходится $\Leftrightarrow \{S_{mn}\}$ ограничено (сверху)

Доказательство:

$\Rightarrow$: Пусть $\exists \lim S_{mn} = S, S_{mn} \leq S_{m'n'} \leq S (m' \geq m, n' \geq n)$

$\Leftarrow$: $\exists \sup \{S_{mn}\} = S: 1) \forall m, n: S_{mn} \leq S \quad 2) \forall \varepsilon > 0 \exists m_0, n_0: S_{m_0 n_0} > S - \varepsilon$

Рассмотрим S_{mn} с номерами $m \geq m_0, n \geq n_0. S - \varepsilon \leq S_{m_0 n_0} \leq S_{mn} \leq S \Rightarrow |S_{mn} - S| < \varepsilon \forall m, n \geq \max(m_0, n_0)$

Теорема 4: Пусть $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ - ряд с неотриц. слагаемыми. Тогда сходимость хотя бы одного из следующих четырёх рядов влечёт сходимость других, причём к той же сумме.

(1) $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ (2) $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ (3) $\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}$ (4) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (a_i - к-либо нумерация эл-ов a_{kl} в диагон. матрице)

Доказательство: ряд (2) $\Leftrightarrow$ ряд (1) $\Leftrightarrow$ ряд (4)

1. ряд (2) $\Rightarrow$ ряд (1): $S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \leq \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \xrightarrow{T.3} (1) \text{ сходится.}$

2. ряд (1) $\Rightarrow$ ряд (2): $\sum_{l=1}^n a_{kl} \leq \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \leq C \Rightarrow \text{сходится } \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \geq 0$
 $\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \leq C \forall m, n \rightarrow \sum_{k=1}^m (\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}) \leq C, m \rightarrow \infty$

3. ряд (1) $\Rightarrow$ ряд (4): $\sum_{k=1}^m a_i \leq \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \leq C \Rightarrow \text{ряд (4) сходится}$

4. ряд (4) $\Rightarrow$ ряд (1): $\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \leq \sum_{i=1}^N a_i \leq C$, рассмотрим $R \in \mathbb{N}$: среди $a_1 \dots a_R$ есть все слагаемые этой гв. суммы $\Rightarrow (1) \text{ сх.}$

Дополн., что они сходятся к одной и той же сумме. $\exists S^{(i)}$ - сумма i -ого ряда.

$\left. \begin{array}{l} \text{Сходимость гв. ряда} \\ \text{Сходимость строчных рядов} \end{array} \right\} \xrightarrow{T.2} S^{(1)} = S^{(2)}$

Ряд (4) получен переenumerацией слагаемых (абсолютно) сходим. ряда (1) $\Rightarrow S^{(4)} = S^{(1)}$

Рассмотрим двойной ряд (1) со слагаемыми произвольного знака.

Определение: Двойной ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится $\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|$ (5)

Теорема 5: Если (5) сходится, то (1) сходится

Доказательство: $\forall A \in \mathbb{R}: \frac{|A|+A}{2}, \frac{|A|-A}{2} : a_{kl} = \frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2} + \frac{|a_{kl}|-a_{kl}}{2}$
 $\sum \frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2}, \sum \frac{|a_{kl}|-a_{kl}}{2}$ — ряды с неотриц. слагаемыми. $\frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2} \leq |a_{kl}| \quad \forall k,l$

Частичные суммы этих рядов не превосходят частичных сумм (5) $\Rightarrow$ эти 2 ряда сходятся $\Rightarrow$ их разность (ряд (1)) сходится.

Теорема 6: Пусть рассматриваются 4 ряда: $\sum_{k,l} a_{kl}, \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}, \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Тогда из абсолютности $\exists$ -ти любого из них $\Rightarrow$ абсолютная с-ть всех других, и, при этом, их суммы равны.

Доказательство: $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k, \sum_{l=1}^{\infty} q_l$
 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k, \sum_{l=1}^{\infty} q_l$
 $\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \rightsquigarrow \sum_{l=1}^{\infty} q_l, \sum_{k=1}^{\infty} p_k$
 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\infty} p_i, \sum_{i=1}^{\infty} q_i$ $p_i = \frac{|a_i|+a_i}{2}, q_i = \frac{|a_i|-a_i}{2}$

сходится абсолютно справа $\Rightarrow$ сходится слева $\Rightarrow$ по т.4, складывая и вычитая, получаем всё то же



ГЛАВА II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ.

§ 1. Вид и сходимости

Пусть $f_n(x), x \in D, \forall n \in \mathbb{N}$. Для $\forall$ фиксированного $x = x_0 \in D: \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность. Рассмотрим множество $\{x_0\} \equiv X: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.
 $\xrightarrow{\text{сходится}}$ $\xrightarrow{\text{не сходится}}$

Определение: функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится (конечно) на X . $f(x)$ — ф-ция на X — точечный предел

Аксиомы для рядов: $u_n(x), x \in D, \forall n$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — сходится при $x \in X \subset D \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — сумма функционального ряда — определена на X .

$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \rightarrow S(x) \forall x \in X$.

Пример: 1) $f_n(x) = x^n, D = \mathbb{R}$

$\{x^n\} \rightarrow 0$, если $|x| < 1$; $\{x^n\} \rightarrow 1$, если $x = 1$ $X = (-1; 1)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x)$

2) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, D = \mathbb{R}; f_n(x) \rightarrow 0 \forall x, X = \mathbb{R}, f(x) = 0. f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$ не является с.с.

3) $f_n(x) = n^2 x (1-x^2)^n, D = \mathbb{R}; f_n(\pm 1) \equiv 0, f_n(0) \equiv 0$

$f_n(x) = n^2 x (1-x^2)^n \rightarrow 0, |x| < 1, x \neq 0, 0 < 1-x^2 < 1 \rightarrow X = [-1, 1] f(x) \equiv 0$

Замечание: Наряду с ф-циями одной переменной $x \in D \subset \mathbb{R}$ можно рассматривать ф-ции многих переменных $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. $\int f_n(x) dx = n^2 \int x (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} n^2 \int (1-x^2)^n d(x^2) = \frac{n^2}{2} \left(-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \delta. \delta.$ по-м

Равномерная сходимости на множестве.

Пусть $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x), x \in X$

Определение: $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall x \in X: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\{f_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x)$

Замечание 1: Равномерная сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на X эквивалентна $\exists$ предела: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$ (*)

$\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N: \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($\geq |f_n(x) - f(x)| \forall x \in X$).

Пример #1:

$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } x = 1; \end{cases} |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |x|^n, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } x = 1; \end{cases} \sup_{x \in (-1; 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad x \in (-1; 1]$ $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ не равномерно на $(-1; 1]$

Рассмотрим $X = [-A, A]$ вместо $(-1; 1]$, где $0 < A < 1: \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = |A|^n \rightarrow 0$

Пример #3: $f_n(x) = n^2 x (1-x^2)^n, -1 \leq x \leq 1: \sup |f_n(x)| = \max |f_n(x)| = \max |f_n(x)| = \max (|x| n^2 (1-x^2)^n)$

$0 \leq x \leq 1: f'_n(x) = n^2 ((1-x^2)^n + x n (1-x^2)^{n-1} (-2x)) = n^2 (1-x^2)^{n-1} (1-x^2 - 2nx^2) = 0$

$\max = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2n+1}} \rightarrow +\infty$

$\{f_n(x)\}$ сходится к 0 неравномерно на $[-1; 1]$

Пример #2: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \{f_n(x)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$

Определение: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к своей сумме $S(x)$ равномерно на X , если $\{S_n(x)\} \xrightarrow{x} S(x)$

Замечание 2: Из определения следует, что если имеет место равномерная сходимости на X , то равномерная сходимости будет иметь место и на $\forall X_1 \subset X$.

Обратное утверждение неверно: из равномерной сходимости на $\forall$ собственном подмножестве $X_1 \subset X$, вообще говоря, не следует равномерная сходимости на $X. \{f_n(x)\}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Критерий Коши

Теорема 1: $\{f_n(x)\} \Rightarrow$ на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ выполняемо $\forall x \in X$.

Доказательство: $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N \forall x \in X: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$

$\Leftarrow$ Заметим, что данное условие для $\forall$ фиксированного $x \in X$ означает сходимости $\{f_n(x)\}$ в точке $x \in X \Rightarrow \exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. В неравенстве $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \forall p \in \mathbb{N}$, перейдем к пределу при $p \rightarrow \infty \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

По определению это означает: $\{f_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x)$

Теорема 2: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$

выполнено сразу $\forall x \in X \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$. $\{S_n(x)\}$ равномерно сходится на X .

Следствие т. 2: Если $\sum u_n(x)$ с.с. равн-но на X , то $\{u_n(x)\} \xrightarrow{x} 0$

Доказательство: В условии Коши т. 2 возьмем $p=1$ $|u_{n+1}(x)| < \varepsilon \forall x \in X$

§2. Признаки равномерной сходимости

Теорема 1 (признак Вейерштрасса) Пусть все слагаемые $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на X удовлетворяет неравенству: $|u_n(x)| \leq c_n, \forall x \in X$

И тогда, если $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ с.с.е., то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с.с.е. равн-но на X . $\sum c_n$ - мажорантный ряд

Доказательство: $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon. \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \quad \forall x \in X \Rightarrow \{Т.2, §1\}$

Замечание! В случае условий сходимости функционального ряда на X признак Вейерштр. часто неэффективен

Пример 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x), -1 < x \leq 1$. Рассмотрим на $[0, 1]$ этот ряд. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + R_N(x) = \ln(1+x)$

$|R_N(x)| < \frac{1}{N+1} \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$ на $[0, 1]$ ряд с.с.е. равномерно

$\sup_{x \in [0, 1]} |u_n(x)| = \sup_{0 \leq x < 1} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| = \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n}$ расходится

Рассмотрим ряды, слагаемые которых представим в виде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x) (*)$

Теорема 2: Пусть 1) частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно о.р. на X , т.е. $\exists M > 0: \forall x \in X: \left| \sum_{n=1}^N u_n(x) \right| \leq M, \forall N$

2) $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна для $\forall$ фиксированного $x \in X$ (по номеру n) и $\{v_n(x)\} \xrightarrow{x} 0$

И тогда ряд $(*)$ сходится равномерно на X (Т-ма Абеля, Дирихле, Харди)

Доказательство: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), u_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x)$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} v_k \stackrel{k-1=k_1}{=} \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k_1=n}^{n+p-1} S_{k_1} v_{k_1+1} =$$

$$= S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) = S_{n+p}(x) v_{n+p}(x) - S_n(x) v_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x))$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq |S_{n+p}(x)| \cdot |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| \cdot |v_{n+1}(x)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)| |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in X \Rightarrow |v_n(x)| < \varepsilon) \leq$$

$$\leq 2M\varepsilon + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = 2M\varepsilon + M \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k(x) - v_{k+1}(x)) \right| = 2M\varepsilon + M |v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)|$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq 2M\varepsilon + M \cdot (|v_{n+1}(x)| + |v_{n+p}(x)|) < 4M\varepsilon = \varepsilon_1, \quad \forall x \in X$$

Теорема 3: (Абель) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x) (*)$

Пусть 1) $\sum u_n(x)$ сходится равн-но на X ; 2) $\{v_n(x)\}$ монотонна для $\forall x \in X$; 3) $\exists M > 0: \forall n, \forall x \in X: |v_n(x)| \leq M$

И тогда $(*)$ сходится равномерно на X

Доказательство: $v_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), u_n(x) = v_n(x) - v_{n-1}(x) \quad \forall n \geq N+1$

$$n \geq N: \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = v_{n+p}(x) \cdot v_{n+p}(x) - v_n(x) v_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} v_k(x) \cdot (v_k(x) - v_{k+1}(x))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in X \quad (v_{n+p}(x) - v_n(x) \forall n \geq N+1)$$

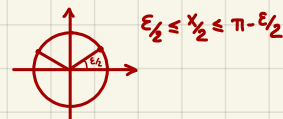
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \varepsilon M + \varepsilon M + \varepsilon \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = 2\varepsilon M + \varepsilon \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k(x) - v_{k+1}(x)) \right| \leq 4\varepsilon M = \varepsilon_1$$

Пример 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}: X = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^N \cos nx = \frac{1}{2 \sin x/2} \sum_{n=1}^N 2 \sin x/2 \cos nx = \frac{1}{2 \sin x/2} (\sin(N+1/2)x - \sin x/2) \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^N \cos nx \right| \leq \frac{1}{|\sin x/2|} \leq \frac{1}{\sin \varepsilon/2} = M$$

$v_n(x) = \frac{1}{n} \downarrow 0, v_n(x) \xrightarrow{x} 0$. На указанном м-ве ряд сходится равномерно $X = (0, 2\pi)$

Пример 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} e^{-nx}, X = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]: u_n(x) = \frac{\cos nx}{n}, v_n(x) = e^{-nx}$



Теорема 4: (признак Дини) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на X . Пусть $(X = [a, b], X \subset \mathbb{R}^m)$

1) ряд сходится на X к $S(x)$; 2) $S(x)$ непрерывна на X ; 3) $u_n(x)$ непр. и неотриц. на X ; 4) X - компакт

И тогда ряд сходится равномерно на X

Теорема 4': Пусть $\{f_n(x)\}$ на X . Пусть:

1) $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x), X$; 2) $f(x)$ непр. на X ; 3) $f_n(x)$ непр. на X и неуб. по-м-ту; 4) X - компакт

И тогда ряд сходится равномерно на X

Доказательство: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), S_{n+1}(x) \geq S_n(x)$. Пусть $\{S_n(x)\} \rightarrow S(x)$ в каждой точке $x \in X$ где $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(x, \varepsilon): \forall n \geq N: |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad (0 \leq S(x) - S_n(x) < \varepsilon \sim 0 \leq S(x) - S_n(x) < \varepsilon)$

$$S(x) - S_n(x) < \varepsilon \Rightarrow \exists \text{ окр-ть } m. x: U(x): \forall \xi \in U(x): 0 \leq S(\xi) - S_n(\xi) < \varepsilon$$

Объединение $U(x), x \in X$ - покрытие м-ва X (оно $> X$). В силу леммы Жейне-Береля о покрытии - из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие м-ва X . $\exists x_1, \dots, x_N \cup U(x_j) > X$

Итак, где $\forall \xi \in X \exists U(x_j) \ni \xi: 0 \leq S(\xi) - S_n(\xi) < \varepsilon, N = N(x_j, \varepsilon)$. Положим $N = \max N(x_j, \varepsilon) \Rightarrow$ где этого N достаточно неравенство $0 \leq S(\xi) - S_n(\xi) < \varepsilon \quad \forall \xi \in X, \forall n \geq N$ - это и есть равн. с.с.м

Примеры, показывающие, что все условия признака Дини существенны для утв. о равн. сходимости.

- ① $f_n(x) = x^n, X = [0, 1]$ ② $f_n(x) = x^n, X = [0, 1]$ ③ $f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, X = [0, 1]$ ④ $f_n(x) = \begin{cases} \sin(n\pi x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}, X = [0, 1]$
- $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ - разрывна $f(x) = 0, X$ - не компакт $f(x) \equiv 0$. $f_n(0) = 0, f_n(x), x > 0$ $f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq n_0(x > 0)$ $f(x) = 0, \sup_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = 1$
- сх-ть неравн. сх-ть неравн. Нет равн. с.с.-ти ($f_n(x)$ не непр.) Нет равн. с.с.-ти (не монотонна)



§3. Функциональные свойства суммирования ряда и предельных сумм ФП.

Теорема 1: Пусть $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ на X , точка $x=a$ — предельная точка для X . Если $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$, $\{f_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x)$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, который также существует.
 $(\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$

Следствие: Если $\{f_n(x)\} \xrightarrow{x} f(x)$, все $f_n(x)$ непрерывны в т.а на X , то $f(x)$ непрерывна в т. $x=a$

Теорема 2: a — предельная точка для X . Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ — сходится равномерно на X , $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = b_n$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Доказательство: ①. Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

В силу критерия Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)| < \varepsilon, \forall x \in X. (1)$

В (1) перейдем к пределу при $x \rightarrow a$: $|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k| \leq \varepsilon_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

②. Докажем утверждение теоремы:

$$|S(x) - \sum b_k| = |\sum_{k=1}^n u_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k| \leq |\sum_{k=1}^n (u_k(x) - b_k)| + |\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k| + |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x) - b_k| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3N} \cdot N = \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N}: |\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k| < \varepsilon/3, |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \varepsilon/3, \forall x \in X \rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} u_1(x) = b_1 \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall x \in X: 0 < |x-a| < \delta \\ \lim_{x \rightarrow a} u_N(x) = b_N \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} |u_1(x) - b_1| < \frac{\varepsilon}{3N}, \dots, |u_N(x) - b_N| < \frac{\varepsilon}{3N} \end{array} \right.$$

Замечание! Требование равномерной сходимости в Т.1 и Т.2 существенно $(x_n \xrightarrow{0 < x \leq 1} f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases})$

Теорема 3: $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$ на $[a, b]$. Если

1) $f_n(x)$ интегрируема на $[a, b]$;

2) сходимость равномерная на $[a, b]$, то

① $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$;

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Доказательство: ① Докажем, что $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. Для этого воспользуемся критерием Дарбу:

$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение отрезка $[a, b]$, на котором $\bar{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

на $[x_{k-1}, x_k]: m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $\bar{S}(f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$, $\underline{S}(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$

$\bar{S}(f) - \underline{S}(f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$, $M_k - m_k = \omega_k(f)$ — колебание f на $[x_{k-1}, x_k]$.

Плк $f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists$ разбиение, для которого $\bar{S}(f_n) - \underline{S}(f_n) = \sum_{k=1}^n \omega_k(f_n) \Delta x_k < \varepsilon_1$

Рассмотрим произвольное разбиение $[x_{k-1}, x_k]$ и $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$

$$f(x') - f(x'') = f(x') - f_n(x') + f_n(x') - f(x'') + f_n(x'') - f_n(x'') = (f(x') - f_n(x')) - (f(x'') - f_n(x'')) + (f_n(x') - f_n(x'')) \Rightarrow$$

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f(x'') - f_n(x'')| + |f_n(x') - f_n(x'')| \quad (\exists N_0, \forall n \geq N_0: |f(x') - f_n(x')| < \varepsilon/4(b-a))$$

$$\Rightarrow \forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]: |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_k(f_n) \Rightarrow \omega_k(f) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_k(f_n)$$

$$\bar{S}(f) - \underline{S}(f) \leq \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=1}^n (\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_k(f_n)) \Delta x_k \stackrel{\forall n \geq N_0}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \bar{S}(f_n) - \underline{S}(f_n)$$

$$\bar{S}(f_n) - \underline{S}(f_n) = \sum_{k=1}^n \omega_k(f_n) \Delta x_k < \varepsilon_1 = \varepsilon/2$$

Второе разбиение осуществится только для $\bar{S}(f_{N_0}) - \underline{S}(f_{N_0}) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

Плк, если в критерии Дарбу, записанном для $f_{N_0}(x)$, взять $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, то $\bar{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$$\textcircled{2} \{f_n(x)\} \xrightarrow{[a, b]} f(x): \forall \varepsilon > 0 \exists N_0, \forall n \geq N_0, \forall x \in [a, b]: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon(b-a) \Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon(b-a) \quad \forall n \geq N_0$$

Теорема 4: $\sum u_n(x) = S(x)$, $x \in [a, b]$. Если

1) $S(x)$ интегрируема на $[a, b]$

2) сходимость равномерная на $[a, b]$, то

① $S(x)$ интегрируема на $[a, b]$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx$

Доказательство: аналогично док-ву теоремы 3.

$\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$, сходится ли $f'_n(x)$? $x \in [a, b]$

$F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, если $\forall x_0 \in (a, b) \exists f'(x_0)$, $x=a \exists$ правая $f'_+(a)$, $x=b \exists$ левая $f'_-(b)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}; \quad f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Теорема 5: Пусть $f_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$; $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$ хотя бы в 1 точке $x_0 \in [a, b]$, $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ Тогда

1) $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$; 2) $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $\{f'_n(x)\} \rightarrow f'(x)$

Доказательство: 1) Известно, что $\{f_n(x_0)\} \rightarrow f(x_0)$. Докажем, что $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$.

Критерий Коши: $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = | \underbrace{(f_{n+p}(x) - f_n(x))}_{\substack{\leftarrow F(x) \leftarrow \text{т-ма Лейбница} \\ \leftarrow F(\xi) \cdot (x-x_0)}} - \underbrace{(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))}_{\leftarrow F(x_0)} + \underbrace{(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))}_{\leftarrow F(x_0)} |$

$$= | (f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi))(x-x_0) + (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)) | \leq |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| \cdot (b-a) + |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$< \frac{\varepsilon}{2}, \forall \xi \in [a, b]$ $< \frac{\varepsilon}{2}, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$ $\text{с } x=a \text{ в точке}$

2) Дифференцируема ли $f(x)$? Фиксируем $\forall x \in [a, b] \rightarrow \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \equiv \varphi_n(h)$

$\varphi_n(h)$ определена: а) если $x \in (a, b)$, то $h: |h| \leq \min(x-a, b-x), h \neq 0$

б) если $x=a$, то $h \in (0, b-a]$

в) если $x=b$, то $h \in [-a-b, 0)$

Докажем, что $\{\varphi_n(h)\}$ сходится равномерно на указанных множествах изменения h .

$$\varphi_{n+p}(h) - \varphi_n(h) = \frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)}{h} - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x) - f_n(x+h) + f_n(x)}{h} = (\xi \text{ между } x \text{ и } x+h) =$$

$$= \frac{\underbrace{(f_{n+p}(x+h) - f_n(x+h))}_{F(x+h)} - \underbrace{(f_{n+p}(x) - f_n(x))}_{F(x)}}{h} = \frac{(f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)) \cdot h}{h} = f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi). \text{ Равн. с тем } \{f'_n(x)\} \Rightarrow |\varphi_{n+p}(h) - \varphi_n(h)| < \varepsilon \quad \forall h$$

Воспользуемся теоремой 1: $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(h)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_n(h) = f'_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Это равенство свидетельствует, что а) $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$

б) $\{f'_n(x)\} \rightarrow f'(x)$

! Аналогичная теорема 6 верна для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in [a, b]$

Теорема 7: Пусть $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$. Известно, что $f_n(x)$ имеют первообразные на $[a, b]$.

Тогда $f(x)$ также имеет первообразную на $[a, b]$.

Доказательство: Пусть $F_n(x)$ - первообразная гр-ии $f_n(x)$. Т.5: $\{F'_n(x)\} \Rightarrow f(x)$??

Рассмотрим $\{F_n(x) - F_n(x_0)\}$: $F'_n(x) = f_n(x) \Rightarrow f(x)$
 $F_n(x_0) - F_n(x_0) \equiv 0$ сходится

В силу т.5: $\frac{d}{dx} [F_n(x) - F_n(x_0)] \rightarrow f(x)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(x) - F_n(x_0))$ является первообразной гр-ии $f(x)$.

§4. Сходимость в среднем.

$\{f_n(x)\}$ — последовательность ф-ий, интегрируемых на $[a, b]$. $f(x)$ — ф-ия, интегрируемая на $[a, b]$.

Определение: $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ (1)

! **Замечание:** $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем на $[a, b] \Rightarrow$ она сходится к $f(x)$ в среднем на $\forall [c, d] \subset [a, b]$

! **Утверждение:** Если $\{f_n(x)\} \xrightarrow{[a, b]} f(x)$, то $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$.

Доказательство: $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2(b-a) = \varepsilon_1$

• Покажем, что из сходимости в среднем, вообще говоря, не следует равномерная сходимость.

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^4(\pi n x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f_n(\frac{1}{2n}) = 1: f_n(x) \not\xrightarrow{r} f(x) \equiv 0, [0, 1]$$

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \sin^4(\pi n x) dx \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ т.е. она сх-ся в среднем на } [0, 1]$$



• Покажем, что, вообще говоря, из сходимости в среднем не следует сх-ть хотя бы в 1 точке

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^1 1 dx = 1 \rightarrow 0, \text{ т.е. } \{f_n(x)\} \text{ сх-ся к } f(x) \equiv 0 \text{ в среднем}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in I_n \\ 0, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus I_n \end{cases}$$

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{I_n} 1 dx = |I_n| \rightarrow 0, \text{ т.е. } \{f_n(x)\} \text{ сх-ся к } f(x) \equiv 0 \text{ в среднем}$$

— Сходится ли она хотя бы в одной точке на $[0, 1]$?

$$f_{2^k}(x_0), f_{2^{k+1}}(x_0), \dots, f_{2^{k+i-1}}(x_0) \Rightarrow \text{в } \{f_n(x_0)\} \text{ содержится всегда } \infty \text{ много } 0 \text{ и } 1.$$

• Покажем, что, вообще говоря, из сх-ти в $\forall$ точке не следует сх-ть в среднем.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha \cdot e^{-n^\alpha x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 0$$

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^1 n^{2\alpha} \cdot e^{-2n^\alpha x} dx = n^{2\alpha} \left[-\frac{1}{2n^\alpha} e^{-2n^\alpha x} \right]_0^1 = \frac{n^{2\alpha-1}}{2} (1 - e^{-2n^\alpha}) \xrightarrow{2\alpha-1 > 0} 0$$

Теорема 8: Если $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx, n \rightarrow \infty$

Доказательство: $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \rightarrow 0$

На лм-ве $R[a, b]$ соответствие: $f, g \in R[a, b] \mapsto \int_a^b f(x)g(x) dx$ задает "скалярное произведение"

$$R[a, b] \cong V, f, g \mapsto (f, g)$$

$$1) (f, g) = (g, f); \quad 2) \text{линейно по 1 аргументу}; \quad 3) (f, f) \geq 0, \forall f, (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g) \quad \forall f, g \in V. \quad \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \quad (*)$$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1 dx} \xrightarrow{\text{const}}$$

! **Замечание:** Верно ли, что только последовательности, сходящиеся в среднем на $[a, b]$ можно почти интегрировать на $[a, b]$?

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha e^{-n^\alpha x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ сходится в среднем } \Leftrightarrow 2\alpha - 1 < 0, \alpha < \frac{1}{2}$$

При каких α :

$$\lim \int_0^1 f_n(x) dx = 0 \stackrel{?}{=} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_0^1 n^\alpha e^{-n^\alpha x} dx = n^\alpha \cdot \frac{1}{n^\alpha} (1 - e^{-n^\alpha}) = n^{\alpha-1} (1 - e^{-n^\alpha}) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 < 0, \alpha < 1$$

§ 5.

Равнотепенная непрерывность. Теорема Арцела.

$\{f_n(x)\} \subset V = R[a, b], C[a, b] \supset \{f_n(x)\} \Rightarrow f(x). \|f_n - f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, |f_n(x)| \leq M, \forall x \in [a, b], \forall n$

Верно ли, что из такой пос-ти можно выделить сходящуюся по норме (т.е. равномерно сходящуюся) подпоследовательность? Вообще говоря, нет!

$f_n(x) = (-1)^n x, 0 \leq x \leq 1$ а) равномерно ограничена ($M=1$); б) сходящейся не является (на основе этого примера строится следующий пример)

Определение: $\{f_n(x)\}$ - равнотепенно непрерывна на $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

Теорема (Арцела): Если $\{f_n(x)\}$ - ограничена в совокупности (т.е. $\exists M > 0: \forall n, \forall x \in [a, b]: |f_n(x)| \leq M$) и равнотепенно непрерывна на $[a, b]$, то из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

! **Замечание:** 1) Отметим, что $\{f_n(x)\}$ является равнотепенной, непрерывной на $[a, b]$, то $f_n(x)$ является равномерно непрерывной на $[a, b]$;

2) Если $\{f_n(x)\} \subset C[a, b]$ такова, что $\{f'_n(x)\}$ ограничена в совокупности, то $\{f_n(x)\}$ равномерно непрерывна на $[a, b]$: $f_n(x') - f_n(x'') = f'_n(\xi_n)(x' - x'') \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \leq \delta, \sup_{a \leq x \leq b} |f'_n(x)| = \delta \cdot \varepsilon$

Доказательство. 1) Спроецируем специальную последовательность точек на $[a, b]$:

 и т.д. $\forall \delta > 0, \forall$ отрезка длины $< \delta$: на нем есть хотя бы одна точка этой пос-ти.

2) Рассмотрим $\{f_n(x)\}$ в т. $x = x_1, f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_n(x_1), \dots$

Это ограниченная пос-ть $\Rightarrow$ (м. Больцано - Вейерштр.) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_1}(x_1)\}$

Рассмотрим построенную пос-ть в т. $x = x_2, f_{n_1}(x_2), \dots, f_{n_2}(x_2), \dots$

Эта пос-ть ограничена $\Rightarrow$ (м. Больцано - Вейерштр.) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_2}(x_2)\}$

Продолжаем аналогичным образом для т. $x_3, x_4, \dots$

$f_{11}(x), f_{21}(x), \dots, f_{n_1}(x), \dots \leftarrow$ сходящаяся в т. x_1

$f_{12}(x), f_{22}(x), \dots, f_{n_2}(x), \dots \leftarrow$ сходящаяся в т. x_1, x_2

$f_{13}(x), f_{23}(x), \dots, f_{n_3}(x), \dots \leftarrow$ сходящаяся в т. x_1, x_2, x_3

$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$

$f_{1m}(x), f_{2m}(x), \dots, f_{nm}(x), \dots \leftarrow$ сходящаяся в т. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$

3) Спроецируем следующую пос-ть: $f_{11}(x), f_{22}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots$

! Эта пос-ть сходящаяся во всех т. $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$

Действительно: $x = x_m: f_{nm}(x_m), f_{n+1m}(x_m), \dots$ В строке N -м "бесконечной" матрицы прив. постро., таким образом эта подпоследовательность пос-ти $f_{nm}(x_m), \dots, f_{nm}(x_m), \dots$, которая является сходящейся.

4) Докажем, что $f_m(x) = F_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ (с помощью критерия Коши).

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in [a, b]: |F_{n+p}(x) - F_n(x)| < \varepsilon.$$

① В силу равнотепен. непр-ти: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x, x_k \in [a, b]: |x - x_k| < \delta \Rightarrow |F_n(x) - F_n(x_k)| < \varepsilon/3, \forall n$

② По какому-то δ укажем $n_0 \in \mathbb{N}$, что на отрезке длины δ есть хотя бы одна точка $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$.

③ Последовательности $\{F_n(x_1)\}, \{F_n(x_2)\}, \dots, \{F_n(x_{n_0})\}$ - все сходятся $\rightarrow$ критерий Коши

$$(*) \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, k): \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}: |F_{n+p}(x_k) - F_n(x_k)| < \varepsilon/3, \forall n \geq N^* (N^* = \max(N(\varepsilon, 1), \dots, N(\varepsilon, k)))$$

$$\text{Тогда } \forall n \geq N^*, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b]: |F_{n+p}(x) - F_n(x)| = |F_{n+p}(x) - F_n(x) + F_{n+p}(x_k) - F_{n+p}(x_k) + F_n(x_k) - F_n(x_k)| =$$

$$= |F_{n+p}(x) - F_{n+p}(x_k) + F_n(x_k) - F_n(x) + F_{n+p}(x_k) - F_n(x_k)| \leq \underbrace{|F_{n+p}(x) - F_{n+p}(x_k)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|F_n(x) - F_n(x_k)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|F_{n+p}(x_k) - F_n(x_k)|}_{(*) < \varepsilon/3} < \varepsilon$$

$$x \in [a, b] \Rightarrow \text{выберем } x_k \text{ из } x_1, \dots, x_{n_0} \text{ так: } |x - x_k| < \delta. \rightarrow < \varepsilon/3 \rightarrow < \varepsilon/3 \rightarrow < \varepsilon/3$$

! **Замечание:** Можно показать, что если $\{f_n(x)\}$ равнотепенно непрерывна на $[a, b]$ и ограничена лишь в одной точке ($x = x_0: |f_n(x_0)| \leq M, \forall n$), то эта последовательность равномерно ограничена в совокупности на $[a, b]$.

§6. Степенные ряды

1.° Понятие степенного ряда и область его определения.

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

$\{a_n\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром в точке $x=x_0$.

! степенной ряд всегда сходится в своем центре: $x=x_0$;

! $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-x_0)^n$, $x \neq x_0$ не выполняется необход. условие сх-ти

В дальнейшем считаем, что $x_0=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (1), \text{ рассмотрим } \{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$$

Если она ограничена сверху, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Если нет, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty = L$

Теорема 1: (Коши-Адамар)

I. Если $L=+\infty$, то (1) сходится только в т. $x=0$.

II. Если $0 < L < +\infty$, то (1) сходится при $x \in (-\frac{1}{L}, +\frac{1}{L})$ и расходится при $|x| > \frac{1}{L}$

III. Если $L=0$, то (1) сходится при $\forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

I: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \exists$ погресси-ть: $\sqrt[nk]{|a_{nk}|} \rightarrow +\infty$

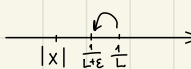
$$\sqrt[nk]{|a_{nk} x^{nk}|} = |x| \sqrt[nk]{|a_{nk}|} \geq |x| \cdot \frac{1}{|x|} \text{ начиная с номера } k_0, k \geq k_0.$$

Если $|x| \geq 1$, то $|a_{nk} x^{nk}| \geq 1, \forall k \geq k_0$. Если $0 < |x| < 1$, то $|a_{nk} x^{nk}| \geq |x|^{nk}$ (противоречие необход. усл. сх-ти)

III: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

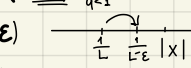
$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}|x| - \text{ данное пер-во верно при } n \geq N \Rightarrow |a_n x^n| \leq \frac{1}{2^n} |x|^n \cdot |x|^n = \frac{1}{2^n}$$

(Доказано по признаку Вейерштрасса)

II: Пусть $\forall x: |x| < \frac{1}{L} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: |x| < \frac{1}{L+\varepsilon}$  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

Полога где $L + \varepsilon/2: \sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon/2$, начиная с некоторого номера $N \Rightarrow$

$$\Rightarrow |a_n x^n| \leq (L + \varepsilon/2)^n \cdot \frac{1}{(L + \varepsilon/2)^n} = \left(\frac{L + \varepsilon/2}{L + \varepsilon}\right)^n: \sum_{q=1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{q=1}^{\infty} q^n$$

Пусть $\forall x: |x| > \frac{1}{L} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: |x| > \frac{1}{L-\varepsilon}$ 

Рассмотрим погресси-ть $\sqrt[nk]{|a_{nk}|} \rightarrow L \Rightarrow$ начиная с некоторого номера: $L - \varepsilon < \sqrt[nk]{|a_{nk}|} < L + \varepsilon$

$$|a_{nk} x^{nk}| > (L - \varepsilon)^{nk} \cdot \frac{1}{(L - \varepsilon)^{nk}} = 1 \Rightarrow \text{ не выполняется необходимое условие сх-ти}$$

Плакши образом всегда (при $L \neq +\infty$) можно указать R -испольное положительное число или $+\infty$, что на $(-R, R)$ степенной ряд сходится, а вне $[-R, R]$ степенной ряд расх-ся.

Определение: интервал $(-R, R)$ называется интервалом сх-ти, число R - результат сх-ти.

! Замечание: Степенной ряд (1) можно рассматривать и для $x \in \mathbb{C}$. В этом случае т. Коши-Адамара также верна и $|x| < R$ - открытой круг на $\mathbb{C}$.

Пример 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $R=1$: $x=\pm 1$: $\sum \frac{(\pm 1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $R=1$, $x=1$ - расходится, $x=-1$ - сходится

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $R=1$, $x=\pm 1$ - расходится

2. Функциональные свойства степенных рядов.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, R \neq 0$$

$$\text{Формально: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{(n+1) a_{n+1}}^{b_n} x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n+1} \cdot \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{R}$$

$$\text{При почленном интегрировании от 0 до } x \text{ также не меняется } \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Теорема: Сумма степенного ряда (1) на $(-R, R)$ является ∞ дифференцируемой ф-цией.

Доказательство:

I. Лемма Степенной ряд (1) равномерно сходится на $\forall$ отрезке $[-z, z]$, где $z < R$.
(т.е. равномерно с-ся внутри интервала с-ти)

Доказательство. $\forall |x| \leq z: |a_n x^n| \leq |a_n| \cdot r^n$: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ сходится, т.к. $z < R$.

а) Слагаемые ряда — непрерывные на $\mathbb{R}$ ф-ции
Ряд равномерно сходится на $[-z, z]$ } $\Rightarrow$ Сумма ряда $f(x)$ непрерывна на $[-z, z]$

б) Слагаемые ряда — дифференц. на $\mathbb{R}$ ф-ции
Ряд сходится в т.о.
Ряд почленный почленно дифференц. с-ся на $(-R, R)$ } $\Rightarrow$ она непр-на в $\forall$ т. $x \in (-R, R)$
 $\Rightarrow f(x)$ — дифференц. ф-ция

! **Замечание:** П.о. степ. ряд можно почленно дифференцировать любое число раз и при этом радиус с-ти не меняется.

Теорема: Степенной ряд (1) можно почленно интегрировать по x в пределах от x_1 до x_2 , где $x_1 < x_2$, $|x_1| < R$ и сумма получающегося ряда равна $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$

Доказательство: аналогично

3. Разложение ф-ции в степенной ряд

Следствие теорем п. 2.:

Если ф-ция $y = f(x)$ разлагается в степенной ряд на $(-R, R)$ то $f(x)$ бесконечно дифференц. на $(-R, R)$

Отсюда вытекает, что коэффициенты разложения этой ф-ции находятся однозначно.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f(0) = a_0, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow f'(0) = 1 \cdot a_1 \dots f^{(n)}(0) = n \cdot a_n$$

$$\text{Получим обратное, } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \forall n$$

Для разложимой на $(-R, R)$ ф-ции $f(x)$ её степенной ряд — это её ряд Тейлора в т.о

Пример Коши: (1828)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0 \Rightarrow f(x) \in C(\mathbb{R})$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2} - 0}{h} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

$$x \neq 0: (e^{-1/x^2})' = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow f'(x) \in C(\mathbb{R})$$

Аналогично докажем, что все $f^{(n)}(x) \in C(\mathbb{R})$ и $f^{(n)}(0) = 0$

Если будем раскладывать в ряд Тейлора, то получим $\equiv 0$.

$$e^{-1/x^2} = R_{n+1}(x)$$

$$f(x) = f(0) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}$$

4. Разложение элементарных ф-ий в ряды Тейлора.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Форма Лагранжа: $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, 0 < \theta < 1$. Форма Коши: $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}$

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$, $(e^x)^{(k)} = e^x \Rightarrow R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \Rightarrow |R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, R = +\infty$$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+3}(x)$, $R_{2n+3}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(\theta x)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \Rightarrow |R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \rightarrow 0$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = +\infty$$

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, R = +\infty$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$, $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \dots, (\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}, |R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \text{ при } 0 \leq x \leq 1$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x^{n+1}, |R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \rightarrow 0 \quad (-1 < x < 0)$$

т.к. $1+\theta x > 1-\theta, 0 < 1+\theta x < 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \leq 1 \quad (R=1)$$

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$

$$[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n - \frac{\alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1}}{n!}$$

$$1-|x| \leq 1+\theta x \leq 1+|x| \Rightarrow (1+\theta x)^{\alpha-1} - \text{между } (1-|x|)^{\alpha-1} \text{ и } (1+|x|)^{\alpha-1} \Rightarrow |\alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1}| - \text{ограничена}$$

Докажем, что эти множители стремятся к 0 ($|x| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n - \text{докажем, что этот ряд сходится}$$

$$\rho_{n+1}/\rho_n = \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(\alpha-n-1)x^{n+1}/(n+1)!}{(\alpha-1)\dots(\alpha-n)x^n/n!} = \frac{(\alpha-n-1)x}{n+1} \rightarrow (-x)$$

6. $\arctg x, (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1 \Rightarrow$

$$\arctg x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall |x| < 1$$

7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^4 - \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} dt = \{ |x| < 1 \} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

5. Теоремы Абеля и их приложения.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-R, R)$, где $0 < R < +\infty$. Есть равномерная сходимость на $[-\tau, \tau] \subset (-R, R)$

1 Теорема Абеля (для степенных рядов)

Пусть (1) сходится в т. $x=R$. Тогда его сумма непрерывна в т. $x=R$.

Доказательство: $\exists 0 \leq x \leq R: \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x)$

[П-к Абеля]: $\sum u_n(x) \Rightarrow$ на $[0, R]$

$v_n(x)$ монотонна $\forall x \in [0, R]$, ограничена в совокупности $|v_n(x)| \leq 1 \} \Rightarrow$ (1) с.с. равномерно на $[0, R]$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (x=1)$$

2 Теорема Абеля: Если ст. ряд (1) с.с. при $x=x_*$, то он с.с. при $\forall x: |x| < |x_*|$.

Если (1) расходится при $x=x_*$, то он расх.с. при $\forall x: |x| > |x_*|$

§ 7. Суммирование расходящихся рядов

$$y' = f(x, y, \varepsilon)$$

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \cdot \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \varepsilon^n + R_N(\varepsilon), \quad \varepsilon = \varepsilon(N), \quad |R_N(\varepsilon)| \leq \delta. \text{ м.} - \text{асимптотические ряды}$$

Пример Эйлера

$$x^4 y' + y = x, \quad y(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow[\text{обобщенный метод } F]{\substack{\text{сходящийся} \\ \text{ряд}}} S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Любой метод суммирования должен быть:

а) линейным: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$

б) регулярность: если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (в обычном смысле), то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{(F)}{=} S$

Метод Чежаро (Cesaro A.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leadsto \{S_n\} - \text{частичные суммы}$$

$$\frac{1}{n} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = \sigma_n$$

$$\text{Если } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{(C)}{=} S$$

Метод Пуассона - Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leadsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \equiv S(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{(A)}{=} S$$

Теорема 1: Методы Чежаро и Пуассона - Абеля линейны и регулярны.

Доказательство: (с) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{(C)}{=} A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \stackrel{(C)}{=} B \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_n = A$
 $\{S'_n\}, \sigma'_n \mid \{S''_n\}, \sigma''_n \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma''_n = B$

$$\forall \alpha, \beta: \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n), \quad S_n = \alpha S'_n + \beta S''_n, \quad \sigma_n = \alpha \sigma'_n + \beta \sigma''_n \rightarrow \alpha A + \beta B$$

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к S в обычном смысле: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Получа $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_1 + \dots + S_n) = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S$

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \stackrel{(A)}{=} A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \stackrel{(A)}{=} B$$

$$S^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}, \quad S^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}, \quad \forall x \in [0, 1] \mid \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S^{(1)}(x) = A$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S^{(2)}(x) = B$$

$$\forall \alpha, \beta: \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n), \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^{n-1} \equiv \alpha S^{(1)}(x) + \beta S^{(2)}(x), \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \alpha A + \beta B$$

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (в обычном смысле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = S(x) \text{ сходится по признаку Абеля } \xrightarrow{\text{т. Абеля}} \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Замечание: Известно, что если $S_n \rightarrow +\infty$, то $\frac{1}{n} (S_1 + \dots + S_n) \rightarrow +\infty$.

Если ряд $\sum a_n$ таков, что $a_n \geq 0$ и он расходится, то он не суммируется методом Чежаро.

Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \stackrel{(C)}{=} \frac{1}{2}$

$$S_n: 1, 0, 1, 0, \dots; \quad \sigma_1 = 1, \sigma_2 = \frac{1}{2}, \sigma_3 = \frac{2}{3}, \sigma_k = \frac{1}{2}, \dots, \sigma_{2k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}, \sigma_{2k+1} = \frac{(1+0)+\dots+(1+0)+1}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \stackrel{(A)}{=} \frac{1}{2}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \frac{1}{2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1} n$$

$$S_{2m} = -m; \quad S_{2m+1} = (1-2) + (3-4) + \dots + (2m-1-2m) + 2m+1 = -m+2m+1 = m+1$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} (S_1 + \dots + S_n) = \frac{1}{n} (1-1+2-2+\dots+S_n) \Rightarrow \text{нет предела } \sigma_n, n \rightarrow \infty$$

$$\sigma_{2m} = 0, \quad \sigma_{2m+1} = (0 + S_{2m+1}) / 2m+1 = \frac{m+1}{2m+1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ ряд не суммируется методом Чежаро

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}, \quad x \in [0, 1)$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^{n+1} x^n\}' = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \right\}' = \left\{ \frac{x}{1+x} \right\}' = \frac{1(1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \stackrel{(A)}{=} \frac{1}{4}$$

Теорема 2: Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ и $a_n = o(\frac{1}{n})$, то ряд $\sum a_n$ сходится в обобщенном смысле к S

Доказательство: $\sum a_k - S = \sum a_k (1-x^{k-1}) + \sum a_k x^{k-1} - S = \underbrace{\sum_{k=1}^N a_k (1-x^{k-1})}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} - S}_{(2)} = \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k x^{k-1}}_{(3)}$

①: $1-x^{k-1} = (1-x)(1+x+\dots+x^{k-2})$
 $\Rightarrow |1-x^{k-1}| \leq (1+x)(1+|x|+\dots+|x|^{k-2}) \leq (1+x)(k-1) \Rightarrow |1-x^{k-1}| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| (1-x)(k-1) \leq \sup_{k \geq 1} (|a_k|(k-1)) \cdot N(1-x) = \sup_{k \geq 1} (|a_k|(k-1)) \cdot S$

$a_n = o(\frac{1}{n}) \Rightarrow \exists \lim (na_n) = 0$. Полагая $\{a_k(k-1)\}$ ограничена

②: $|S(x) - S| < \varepsilon$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $1-\delta < x < 1$, $\delta = \frac{\varepsilon}{N} < \varepsilon$ (выберем N)

③: $|3| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k| \cdot k}{k} \cdot x^{k-1} \leq \frac{1}{N+1} \sup_{k \geq N+1} \{ |a_k| \cdot k \} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} x^{k-1} \leq \frac{1}{N+1} \sup_{k \geq N+1} \{ |a_k| \cdot k \} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{N+1} \sup_{k \geq N+1} \{ |a_k| \cdot k \} \cdot \frac{1}{1-x} \quad \textcircled{3}$

$\exists \lim (na_n) = 0 \Rightarrow |ka_k| < \varepsilon^2, \forall k \geq N+1$ Учим $x = 1 - \varepsilon/N$, т.е. $\frac{1}{1-x} = \frac{N}{\varepsilon}$

$\textcircled{3} \Rightarrow \frac{1}{N+1} \sup_{k \geq N+1} \{ |a_k| \cdot k \} \cdot \frac{N}{\varepsilon} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Указан способ выбора ε комере N так, что $|\sum_{k=1}^N a_k - S| < (1 + \sup_{k \geq 1} (|a_k|(k-1))) \cdot \varepsilon$

Теорема 3: Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Доказательство: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k, S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$a_n = S_n - S_{n-1}, \forall n \geq 2; n=1: a_1 = S_1 - 0$

$G_n = \frac{1}{n} (S_1 + \dots + S_n), G_0 = 0, G_{-1} = 0; G_{n-1} = \frac{1}{n-1} (S_1 + \dots + S_{n-1})$

$n G_n - (n-1) G_{n-1} = S_n, \forall n \geq 2, 1 \cdot G_1 - 0 = S_1, n=1$

$a_n = S_n - S_{n-1} = n G_n - (n-1) G_{n-1} + (n-2) G_{n-2} - (n-1) G_{n-1} = n G_n - 2(n-1) G_{n-1} + (n-2) G_{n-2}, n \geq 3, n=2, n=1 (a_1 = G_1 = S_1)$

2) $\frac{a_n}{n} = G_n - 2 \frac{n-1}{n} G_{n-1} + \frac{(n-2)}{n} G_{n-2}$, если (теорема) $G_n \rightarrow S$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = S - 2S + S = 0$, т.е.

$a_n = o(n), n \rightarrow \infty \Rightarrow \exists N_0, \forall n \geq N_0: |\frac{a_n}{n}| \leq 1$

3) $\sum a_n x^{n-1} = S(x), \forall x \in [0, 1)$

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n}: \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \text{радиус сходимости} \geq 1$

4) Докажем, что если $\sum a_n$ суммируема по Ляпу и имеет обобщенную сумму S , то $S(x) = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n G_n x^{n-1} (*)$

Ряд (*) сходится, т.к. $n G_n \sim n \cdot S, \forall x \in [0, 1), \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n G_n} \rightarrow 1$

$(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n G_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n G_n x^{n-1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2n G_n x^n}_{+1 \cdot 0 \cdot G_0 \cdot x^0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n G_n x^{n+1}}_{+1 \cdot 0 \cdot G_0 \cdot x^0} = \sum_{n=1}^{\infty} n G_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1) G_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) G_{n-2} x^{n-1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \{ n G_n - 2(n-1) G_{n-1} + (n-2) G_{n-2} \} x^{n-1} = S(x)$

5) Вспомогательное $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$

Положа $S(x) - S = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n G_n x^{n-1} - (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n S x^{n-1} = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n (G_n - S) x^{n-1} = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n (G_n - S) x^{n-1} + (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} n (G_n - S) x^{n-1} \equiv \textcircled{1} + \textcircled{2}$

$|\textcircled{2}| = (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} n |G_n - S| x^{n-1} \leq \{ \text{выберем } N: \forall n \geq N |G_n - S| < \varepsilon/2 \} \leq \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} n x^{n-1} = \varepsilon/2$

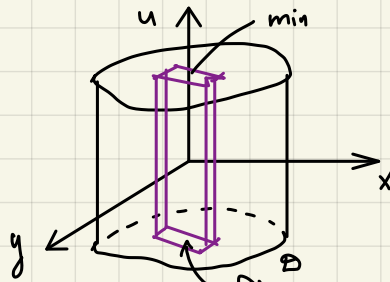
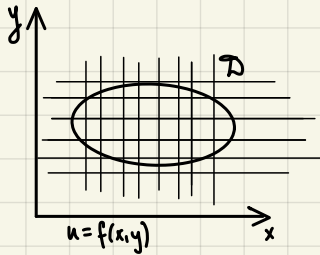
$|\textcircled{1}| \leq (1-x)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n |G_n - S| x^{n-1} \leq \max_{1 \leq n \leq N-1} |G_n - S| \cdot (1-x)^2 (N-1)^2$

Выберем $\delta > 0$: при $0 < 1-x < \delta: \max_{1 \leq n \leq N-1} |G_n - S| \cdot (N-1)^2 (1-x) < \varepsilon/2 \Rightarrow |S(x) - S| < \varepsilon$

Глава III. Интегрирование от-ий нескольких переменных.

§ 1. Двойной интеграл: определение и существование

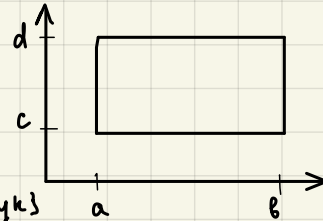
$\iint_D f(x,y) dx dy$, D - замкнутое ограниченное мн-во, $u = f(x,y)$ - определена при $(x,y) \in D$



Цилиндрическая область с основанием D :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k, \eta_k) |D_k|$$

$$d = \max |D_k|$$



$D = R$ - прямоугольник на Oxy : $\{a \leq x \leq b\} \times \{c \leq y \leq d\}$

Разделение T прямоугольника R горизонтальными и

вертикальными линиями: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \Rightarrow R = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m R_{kl}$, где $R_{kl} = \{x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \times \{y_{l-1} \leq y \leq y_l\}$

d_{kl} - диагональ R_{kl} , $d = \max d_{kl}$ - диаметр разбиения T .

$(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$: $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\xi_k, \eta_l) \cdot |R_{kl}|$ - интегральная сумма

Определение: Ф-ия $u = f(x,y)$ называется интегрируемой (по Риману) на R , если

$\lim \{ \text{интегральная сумма} \} = I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \text{ разбиения } T \text{ с диаметром } d < \delta,$

$\forall$ выбора точки (ξ_k, η_l) $|\text{интегральная сумма} - I| < \varepsilon$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = I$$

Замечание: Из определения двойного интеграла следует, что если $f(x,y)$ не ограничена на R , то за счет выбора прямоугольных точек (ξ_k, η_l) при любом разбиении T интегральную сумму $G(f,T)$ можно сделать сколь угодно большой по модулю $\Rightarrow$ если $f(x,y)$ интегрируема на R , то $f(x,y)$ ограничена на R . Доказывается аналогично одномерному случаю.

Вводим верхние и нижние суммы Дарбу: $\underline{S}(f,T) = \sum_{k,l} m_{kl} |R_{kl}|$, $\bar{S}(f,T) = \sum_{k,l} M_{kl} |R_{kl}|$

где m_{kl}, M_{kl} - $\inf$ и $\sup$ от-ии $f(x,y)$ на R_{kl} .

Суммы Дарбу обладают свойствами:

1) $\underline{S}(f,T) \leq G(f,T) \leq \bar{S}(f,T)$, $\forall T, \forall (\xi_k, \eta_l)$

2) $\forall$ разбиение $T, \forall \varepsilon > 0 \exists (\xi_k, \eta_l) \in R_{kl} (\forall k, l): 0 \leq G(f,T) - \underline{S}(f,T) < \varepsilon; 0 \leq \bar{S}(f,T) - G(f,T) < \varepsilon$

3) Если разбиение T' получено из исходного разбиения T добавлением дополнительных горизонтальных или вертикальных прямых разбиения (усложнение T), то $\underline{S}' \geq \underline{S}$, $\bar{S}' \leq \bar{S}$

4) Если $\underline{S}'$ - нижняя сумма Дарбу для T' , $\bar{S}''$ - верхняя сумма для T'' , то $\underline{S}' \leq \bar{S}''$

Мн-во нижних сумм Дарбу ограничено сверху $\Rightarrow \exists \sup \underline{S}(f,T) = I_*$. нижний интеграл Дарбу
Мн-во верхних сумм Дарбу ограничено снизу $\Rightarrow \exists \inf \bar{S}(f,T) = I^*$ - верхний интеграл Дарбу

6) При $d \rightarrow 0$: $\underline{S}(f,T) \rightarrow I_*$, $\bar{S}(f,T) \rightarrow I^*$.

7) Ф-ия $f(x,y)$ интегрируема на $R \Leftrightarrow I_* = I^*$ или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T: |\underline{S}(f,T) - \bar{S}(f,T)| < \varepsilon$$

Теорема 1: Если $u = f(x,y)$ непр-на на R , то она интегрируема на нем

Доказательство: $\bar{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) = \sum (\max f(x,y) - \min f(x,y)) \cdot |R_{kl}|$

В силу равномерной непр-ти $f(x,y)$ на R : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x_k - x_{k-1}| < \delta, |y_l - y_{l-1}| < \delta \Rightarrow$

$$\{ \text{колебание } f(x,y) \text{ на } R_{kl} \} < \varepsilon \Rightarrow \bar{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) < \varepsilon \cdot |R|$$

Определение: Элементарная (многоугольная) фигура Q - объединение конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

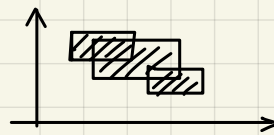
Определение: Класс ф-ий $f(x,y)$, обладающий I-свойством:

1) $f(x,y)$ определен на $D \subset \mathbb{R}^2$

2) непрерывна на D , за исключением, быть может, мн-ва D_0 , которое таково, что: $\forall \varepsilon > 0 \exists$ элементарная фигура $Q \supset D_0$, площадь $Q < \varepsilon$.

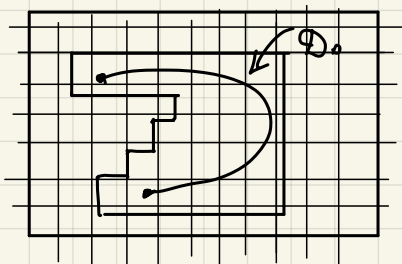
Например, 1) D_0 - конечное число точек: $\square_1, \square_2, \dots, \square_N, S_{D_0} < \frac{\varepsilon}{N}$ или 2) D_0 - отрезок на $\mathbb{R}^2$ или 3) D_0 - спрямляемая кривая.

Известно, что D_0 можно поместить в многоугольник сколь угодно малой площади $\rightarrow \exists$ элементарная фигура, площадь которой не более чем в 32 раза больше площади многоугольника и но содержащего D_0 .



Теорема 2: Если $f(x,y)$ обладает I-свойством в R , то она интегрируема на R и $f(x,y)$ ограничена

Доказательство: Рассмотрим произвольное разбиение R на части $R_k = \bigcup_{k \in K} R_k$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$; пусть $M_0 > 0: |f(x,y)| \leq M_0, (x,y) \in R$.



1) Найдем мн-во точек разбиения D_0 элементарной фигурой площади $< \frac{\varepsilon}{2M_0}$

Птем самым, по исходному разбиению R получим новое разбиение. элементарная фигура $Q \supset D_0$ - объединение прямоугольников нового разбиения - оно является увеличением исходного.

Рассмотрим суммы Дарбу для исходного разбиения и нового: $\underline{S}(f) \leq \underline{\tilde{S}}(f), \bar{\tilde{S}}(f) \leq \bar{S}(f)$ Разница между суммами в каждом неравенстве оцениваем через величину,

пропорциональную диаметру исходного разбиения:

$$\tilde{S}(f) - \underline{S}(f) = \sum_{k \in K} (M_k - m_k) |R_k| = \sum_{k \in K} \underbrace{(M_k - m_k)}_{\leq M_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_0}} |R_k| + \sum_{k \in K} \underbrace{(M_k - m_k)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2M_0}} |R_k| < \varepsilon$$

Случай произвольной области:

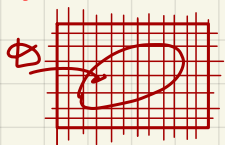
D - ограничена, замкнута, её граница ∂D имеет площадь 0.

Задача $u = f(x,y)$ на D . Рассмотрим прямоугольник K $R = [a \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d]; R \supset D$. Определим новую ф-ию: $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$

Определение: Ф-ия $f(x,y)$ интегрируема на D , если $F(x,y)$ интегрируема на R и $\int_D f(x,y) dx dy = \int_R F(x,y) dx dy$

Замечание 1: Это определение зависит от $R \supset D$, хотя двойной интеграл для $f(x,y)$ должен зависеть только от D . Идет о док-ва независимости $\int_D f(x,y) dx dy$ от выбора $R \supset D$.

Замечание 2: Рассмотрим $f(x,y) = 1$ на D , тогда $\int_D 1 dx dy =$ площадь D (при введенных ограничениях на $D \rightarrow D$ квадратуема)



Верхняя сумма Дарбу $\bar{S} = \sum M_k \cdot |R_k|$. Если $R_k \subset D$, то $M_k = 1$.

Если $R_k \subset R \setminus D$, то $M_k = 0$, если R_k содержит точки и в D , и в $R \setminus D$, то $M_k = 1$.

$\bar{S} =$ площадь элементарной фигуры $\supset D$. $Q_1 \subset D \subset Q_2, |Q_2| - |Q_1| < \varepsilon$

$\underline{S} =$ площадь элементарной фигуры $\subset D$.

Теорема 3: Если $f(x,y)$ непрерывна в D , то она интегрируема на D .

Доказательство: $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$. $F(x,y)$ непр-на во всех точках R за исключением, быть может, всех ∂D .

$\Rightarrow F(x,y)$ либо непрерывна на R , либо обладает I-свойствами на $R \Rightarrow \exists \int_R F(x,y) dx dy \Rightarrow$ требуемое доказано

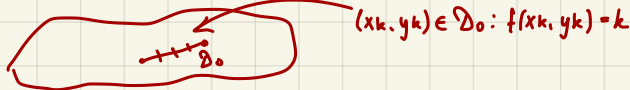
Теорема 4: Пусть $f(x,y)$ обладает I-свойствами на D . Тогда $f(x,y)$ интегрируема на D .

Доказательство: следует из того, что $F(x,y)$ также обладает I-свойствами на R

Следствие 1: Если $f(x,y)$ непрерывна на D за исключением, быть может, конечного числа точек и/или спрямляемых кривых, то она интегрируема на D .

Следствие 2: Если $f(x,y)$ интегрируема на D , а $g(x,y) = f(x,y)$ в D за исключением некоторого мн-ва D_0 площади нуль, то $g(x,y)$ интегрируема на D и $\int_D g(x,y) dx dy = \int_D f(x,y) dx dy$

Замечание: Последнее следствие позволяет в этих случаях рассматривать и интеграл от неограниченных ф-ий в D .



Определение двойного интеграла с помощью произвольного разбиения области

y



Конечный набор спрямленных кривых в D.

Получится разбиение D на части: $D = \bigcup D_k$. D_k - замкнутая подобласть;

∂D_k - площадь нуля $\Rightarrow$ имеет площадь $|D_k|$

$D_k: \{ \text{dist}(M, N), M, N \in D_k \}$ имеет точную верхнюю грань $\equiv$ диаметр d_k обл-ти D_k .

На D задана $f(x, y)$: в $\forall D_k \ni (x_k, y_k)$ и образуем следующую конечную сумму. $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot |D_k|$ - интегральная сумма $G(f)$, соответствующая данному разбиению и данному выбору $\{ (x_k, y_k), k=1, n \}$

Определение*: Ф-ия $f(x, y)$ называется интегрируемой на D, если $\exists$ предел I интегральных сумм, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall$ разбиения $D = \bigcup D_k$, диаметра $d = \max_{1 \leq k \leq n} d_k < \delta$, при $\forall$ выборе $(x_k, y_k), k=1, n: |G(f) - I| < \varepsilon$

Определение: $f(x, y)$ интегрируема на D, если $F(x, y) = \int f(x, y), D$ интегрируема $(0, R \setminus D)$

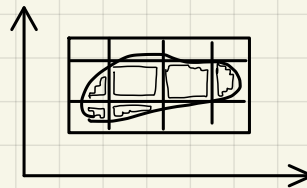
Теорема 5: Определение двойного интеграла опр^* и опр эквивалентны.

Доказательство: П.к. в опр. разбиение проводится прямыми (простейшие спрямленные кривые), то $\text{опр}^* \Rightarrow \text{опр.}$ Докажем обратное.

Рассмотрим произвольное разбиение $D = \bigcup D_k$ и введем сумму $\text{Дар} \sum \bar{S}^*(f) = \sum_{k=1}^n M_k^* |D_k|, \underline{S}^*(f) = \sum_{k=1}^n m_k^* |D_k|$ где $M_k^* = \sup_{(x,y) \in D_k} f(x, y), m_k^* = \inf_{(x,y) \in D_k} f(x, y): \underline{S}^*(f) \leq G^*(f) \leq \bar{S}^*(f)$ ($G^*(f)$ - интегральная сумма, соотв. разбиению D)

П.к. $f(x, y)$ интегрируема на D в опр. , то $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение прямоугольника $R \supset D$ на части с диаметром $< \delta$: $\bar{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon/2$

Рассмотрим отрезки прямых разбиения внутри R и границу $\partial D \Rightarrow$ это множество имеет площадь нуля $\Rightarrow \exists$ элементарная фигура Q, покрывающая это множество и имеющая площадь $< \varepsilon/4 M_0, M_0 = \sup_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$

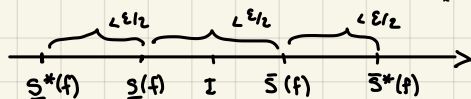
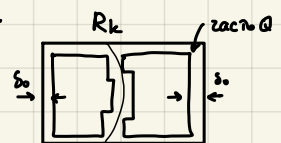


На Q введем величину $\delta_0 > 0$: δ_0 - минимальное расстояние от ∂Q до того множества площади нуля, которое она покрывает.

Рассмотрим произвольное разбиение $D = \bigcup D_k$ с диаметром разбиения $< \delta_0$.

$$\bar{S}^*(f) = \sum M_i^* |D_i|, \underline{S}^*(f) = \sum m_i^* |D_i|$$

$$\bar{S}^*(f) = \sum_{i: D_i \cap Q = \emptyset} M_i^* |D_i| + \sum_{i: D_i \cap Q \neq \emptyset} (M_i^*) |D_i| < \sum_{i: D_i \cap Q = \emptyset} M_i^* |D_i| + \varepsilon/4 = \varepsilon/4 + \sum_{i: D_i \cap Q = \emptyset} M_i^* |D_i| \leq \{ M_i \leq M_k = \sup_{(x,y) \in R} f(x, y) \} \leq \varepsilon/4 + \sum_{i: D_i \cap Q = \emptyset} M_k \sum |D_i| = \varepsilon/4 + \sum_k M_k |R_k| - \sum_k M_k \cdot |R_k \setminus \bigcup D_i| < \varepsilon/2 + \bar{S}(f)$$



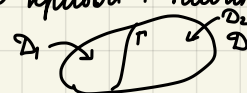
$$\left. \begin{aligned} \bar{S}^*(f) &< \bar{S}(f) + \varepsilon/2 \\ \underline{S}^*(f) &> \underline{S}(f) - \varepsilon/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{S}^*(f) - \underline{S}^*(f) &< \frac{3\varepsilon}{2} \\ |\bar{S}^*(f) - I| &< \varepsilon \\ |\underline{S}^*(f) - I| &< \varepsilon \end{aligned} \right.$$

§ 2. Основные свойства двойного интеграла.

1° Аддитивность:

Пусть $f(x,y) \in R(D)$ и область D разбита на 2 части $D = D_1 \cup D_2$ с помощью кривой Γ площади нullo.

Тогда $f \in R(D_1)$, $f \in R(D_2)$ и $\iint_D f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$



Доказательство:

Рассмотрим разбиение $D = \bigcup_{i=1}^n \tilde{D}_i$, добавим к этому разбиению кривую $\Gamma \Rightarrow$ получим новое разбиение D , а также разбиение D_1 и D_2 .

Составим суммируемые: $\bar{S}, \underline{s}$ для D , $\bar{S}_1, \underline{s}_1$ для D_1 , $\bar{S}_2, \underline{s}_2$ для D_2 : $\bar{S}_1 - \underline{s}_1 \leq \bar{S} - \underline{s}$

Если разбиение области D таково, что $\bar{S} - \underline{s} < \varepsilon$, то $\bar{S}_1 - \underline{s}_1 < \varepsilon \Rightarrow f \in R(D_1)$. Аналогично $f \in R(D_2)$

$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$, $\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 \Rightarrow$ равенство для интегралов.

2° Линейность.

Если $f, g \in R(D)$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha f + \beta g \in R(D)$ и $\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy$

Доказательство:

$$G = \sum (\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)) |D_i| = \alpha \sum f(\xi_i, \eta_i) |D_i| + \beta \sum g(\xi_i, \eta_i) |D_i|$$

3° Если $f(x,y) \in R(D)$, то $f^2(x,y) \in R(D)$. f, φ : $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq c \cdot |t_2 - t_1| \Rightarrow \varphi(t)$, $\varphi(t) = t^2$

Доказательство:

аналогично одномерному интегралу Римана

4° Если $f(x,y), g(x,y) \in R(D)$, то $f(x,y) \cdot g(x,y) \in R(D)$

$$(fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2))$$

5° Если $f, g \in R(D)$ и $f(x,y) \leq g(x,y)$ на D , то $\iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D g(x,y) dx dy$

6° Если $f(x,y) \in R(D)$, то $|f(x,y)| \in R(D)$ и $|\iint_D f dx dy| \leq \iint_D |f| dx dy$

$$(|A| - |B|) \leq |A - B|, \quad -|f| \leq f \leq |f|$$

7° Пусть $f, g \in R(D)$, $g(x,y) \geq 0$ на D . Тогда $\iint_D fg dx dy = \mu \iint_D g dx dy$, где $\inf_D f \leq \mu \leq \sup_D f$

Если f непрерывна на D , то $\mu = f(\xi, \eta)$, где $(\xi, \eta) \in D$.

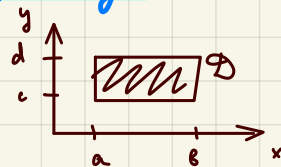
§3. Сведение двойного интеграла к повторному.

1° Случай: D - прямоугольник

Теорема 6: Пусть $f(x,y) \in R(D)$ и $\forall x \in [a,b] \exists \int_c^d f(x,y) dy = J(x)$.

Тогда $J(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\iint_D f dx dy = \int_a^b J(x) dx$

$$\iint_D f dx dy = \int_a^b J(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$$



Доказательство: Рассмотрим разбиение D на маленьких прямоугольниках

$D = \bigcup R_{kl}$. Возьмем $\forall (x,y) \in R_{kl}$:

$$m_{kl} \leq f(x,y) \leq M_{kl} \mid \Delta y_l = y_l - y_{l-1} \rightarrow m_{kl} \Delta y_l \leq f(x,y) \Delta y_l \leq M_{kl} \Delta y_l \rightarrow m_{kl} \Delta y_l \leq \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x,y) dy \leq M_{kl} \Delta y_l$$

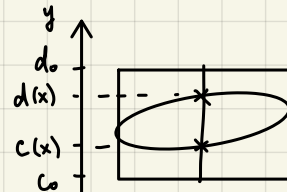
$$\sum_{l=1}^d m_{kl} \Delta y_l \leq \int_c^d f(x,y) dy \leq \sum_{l=1}^d M_{kl} \Delta y_l \rightarrow \sum_{l=1}^d m_{kl} \Delta y_l \Delta x_k \leq J(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{l=1}^d M_{kl} \Delta y_l \Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^d m_{kl} \Delta y_l \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^b J(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^d M_{kl} \Delta y_l \Delta x_k \rightarrow \text{при } d \rightarrow 0: \underline{S}(f) \leq G(J) \leq \overline{S}(f)$$

Замечание: В данной теореме $\iint f dx dy$ можно поменять x, y ролями.

2° Случай произвольной области D .

Пусть D - простая, т.е. любая прямая $x = x_0$ пересекает D либо по отрезку, либо в одной точке, либо не пересекает вообще.
 $a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)$



Теорема 7: Пусть $f(x,y) \in R(D)$, D - простая.

Кроме того, где $\forall x \in [a,b], \exists J(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy$. Тогда $J(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b J(x) dx$

Доказательство: $R = [a \leq x \leq b] \times [c_0 \leq y \leq d_0]$ так чтобы $D \subset R$

$$\iint_D f dx dy = \iint_R F(x,y) dx dy, F(x,y) = \begin{cases} f, & \text{в } D \\ 0, & \text{вне } D \end{cases}$$

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy dx = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy = \int_a^b J(x) dx$$

! Случай обычных областей часто сводится к случаю простых областей, используя с-во аддитивности

§4. Пройные и n-кратные интегралы.

$$D \subset \mathbb{R}^n, \int_D f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

Все теоремы двойного интеграла без каких-либо принципиальных изменений и новых идей переносятся на n-кр. инт.

1. n-мерный параллелепипед: $\Pi = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq y_i \leq b_i, \forall i=1, \dots, n\}$

2. n-мерное элементарное тело - объединение конечного числа n-мерных параллелепипедов, попарно пересекающихся только по границе

3. Объем n-мерного параллелепипеда $= (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$

Объем n-мерного элементарного тела = сумма объемов параллелепипедов, его составляющих

4. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, где D - ограничено. Рассмотрим все элементарные тела $Q \subset D$: $|Q|$ -их объем.

$\sum |Q|$ = нижний объем D . Рассматриваются все элемент. тела $P \supset D$: $|P|$ -их объем, $\inf |P|$ = верхний объем D .

Мн-во D - кубиреуемо (имеющее n-мерный объем), если нижний объем D = верхний объем D .

Если нет элементарных тел $Q \subset D$ и верхний объем D = 0, то мн-во D имеет n-мерный объем нуль: $|D| = 0$.

5. Пусть D - n-мерный параллелепипед. Тогда $\int_D f(y) dy, \bar{y} = y \in \mathbb{R}^n$ вводится по той же схеме, что и двойной интеграл по прямоугольнику. Сумма Дарбу, критерий интегрируемости - аналогично.

6. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченное, замкнутое, кубиреуемое мн-во $\subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\int_D f(y) dy$ опре-ся через $F(y) = \begin{cases} f(y), & y \in D \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$ где $\mathbb{R}^n$ - n-мерный.

7. Интеграл $\int_D f(y) dy$ можно ввести, используя произвольное разбиение D на кубиреуемые части: $D = \bigcup_{k=1}^N D_k$

Докажется, что это определение экв-но данному в 6.

8. Свойства интегралов аналогичны св-вам двойных интегралов. В частности $\int_D 1 dy$ = n-мерный объем D .

9. k-кратные интегралы можно сводить к повторным.

Теорема: Пусть D - ограничено, замкнуто, кубиреуемо и обладает следующими свойствами:

В прямой, параллельной Ox пересекает D либо в точке, либо по отрезку, либо не пересекает вовсе.

Тогда, если $D': (x_2, \dots, x_n) \in D': a_1(x_2, \dots, x_n) \leq x_1 \leq b_1(x_2, \dots, x_n)$, то $\int_D f(x) dx = \int_{D'} \dots \int_{D'} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$

при условии, что этот однократный интеграл как ф-ия переменных $(x_2, \dots, x_n)$ существует на D' .

§ 5. Замена переменных в кратных интегралах.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_y^n$: $y = \bar{y} = (y_1 \dots y_n)$: $y_i = \psi_i(x_1 \dots x_n)$ $\left| \begin{array}{l} \bar{y} = \psi(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \mathcal{D} = \psi(\Omega) \end{array} \right.$

Считаем, что:

1) $\psi: \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_y^n$ взаимно однозначно в Ω .

2) $\psi_k \in C^1(\Omega) \forall k$

3) функциональная матрица $n \times n$: $J_\psi = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ - непротив эндр в Ω , т.е. $\det J_\psi \neq 0$ в Ω

$$\left(\frac{\partial(\psi_1 \dots \psi_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}, \frac{d(\psi_1 \dots \psi_n)}{d(x_1 \dots x_n)} \right)$$

исходные преобразования

Замечание: Условие невырожденности матрицы в п.3 естественно, т.к. является достаточным условием

непр-но диф-еиш ψ -ий $\left. \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(y_1 \dots y_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(y_1 \dots y_n) \end{array} \right\}$ огибающихся обратное отображение $\mathcal{D} \rightarrow \Omega$.

Пусть теперь $f(y)$ интегрируема в $\mathcal{D}$: $\int_{\mathcal{D}} f(y) dy = \int_{\Omega} F(x) dx$.

Для одномерного интеграла Римана: $F(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$

Теорема 1: Если $f(y) \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$, то суперпозиция $(f \circ \psi)(x) \in \mathcal{L}(\Omega)$ и справедлива формула

$$\int_{\mathcal{D}} f(y) dy = \int_{\Omega} (f \circ \psi)(x) |\det J_\psi| dx \quad (1) \quad (f \circ \psi)(x) \Leftrightarrow f(y_1 \dots y_n) = f(\psi_1(x_1 \dots x_n), \dots, \psi_n(x_1 \dots x_n))$$

Теорема 2: Формула (1) остается справедливой, если $\det J_\psi$ обращается в нуль на $\Omega \subset \Omega$, которое имеет n -мерный объем ноль. $|\Omega_0| = 0$

Комментарии к т.1 (вместо полного доказательства)

① $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_y^n \xleftarrow{\psi} \Omega \subset \mathbb{R}_x^n$ Из (1) следует: $\int_{\mathcal{D}} f(y) dy = \int_{\Omega} (f \circ \psi)(x) |\det J_\psi| dx = \int_{\Omega} (f \circ \psi \circ \alpha)(x) |\det J_\psi| |\det J_\alpha| dx$

$$\begin{aligned} y_i = \psi_i(x_1 \dots x_n) &= \frac{\beta_i(z_1 \dots z_n)}{\beta_1(\alpha_1(x_1 \dots x_n), \dots, \alpha_n(x_1 \dots x_n))}, \text{ где } z_j = \alpha_j(x_1 \dots x_n) \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial \beta_i}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \beta_i}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$J_\psi = J_\beta \cdot J_\alpha \Rightarrow \det J_\psi = \det J_\beta \cdot \det J_\alpha$$

② Формула (1) обобщает правило замены переменных в одномерном случае.

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_y^1$: $y = \psi(x)$ - непрерывно диф-ема и сохраняет знак. $\psi'(x)$ - строго монотонная ψ -ия

$\mathcal{D} = [c, d]$; $\psi: [a, b] \rightarrow [c, d]$

$$\int_{\mathcal{D}} f(y) dy = \int_a^b f(\psi(x)) \psi'(x) dx, \quad \psi(x) \text{ монотонно возрастает } (\psi'(x) > 0) \quad | \psi'(x) |$$

$$\text{Если же } \psi(x) \text{ монотонно убывает, то } \int_{\mathcal{D}} f(y) dy = \int_a^b f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int_a^b f(\psi(x)) (-\psi'(x)) dx$$

③ Докажем Т.1 для случая линейного преобразования координат

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + \beta_1 \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + \beta_n \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + b \end{array} \right.$$

В этом случае: $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij}$. $\det J_\psi = \det A$ - константа

Утверждение: Любое линейное преобразование (2) может быть сведено к последовательному выполнению следующих простейших преобразований.

I. "сдвиг" по 1 переменной: $y_k = x_k, \forall k \neq i, y_i = x_i + \lambda$

II. "растяжение по 1-ой переменной": $y_k = x_k, \forall k \neq i, y_i = \lambda x_i \quad (\lambda \neq 0)$

III. "": $y_k = x_k, \forall k \neq i: y_i = x_i + \lambda x_j \quad (j \neq i, \lambda \neq 0)$

перестановка двух строк и сведена к преобразованиям II и III типов

А $\xrightarrow{\text{ЭП}}$ единичная матрица. $|A| \neq 0$. $A = T_5 T_4 \dots T_1$, где T_i - матрицы ЭП

В силу комментария п.1 достаточно обосновать формулу замены переменных (1)

для каждого из простейших преобразований I, II и III.

$$\int_{\mathcal{D}} f(y) dy = \int_{\mathcal{D}} f(y) dy = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(y_1 \dots y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathcal{D}} f(y) dy = \int_{\Omega} f(\psi(x)) |\det J_\psi| dx$$

Заметим, что во всех отвлеченных интегралах $y_k \Leftrightarrow x_k$

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(y_1 \dots y_n) dy_1 \dots dy_n$$

$$\text{I. } \Leftrightarrow \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \lambda, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$R \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}_x^n$$

т.е. мы делаем n -мерный параллелепипед, только "сдвигаем" по i -ой переменной

$$\text{II. } \Leftrightarrow \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) \lambda dx_1 \dots dx_n$$

$$R \xrightarrow{\lambda} \Omega - n\text{-мерный параллелепипед}$$

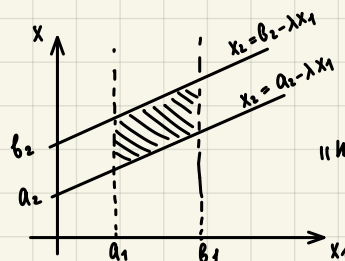
Если $\lambda > 0$: правая часть = правая часть формулы (1), $\det J_\psi = \lambda$

Если $\lambda < 0$, то $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) |\lambda| dx_1 \dots dx_n$

$$\text{III. } \Leftrightarrow \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$n=2$: $a_1 \leq y_1 \leq b_1, a_2 \leq y_2 \leq b_2$: R

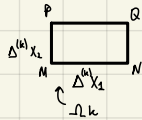
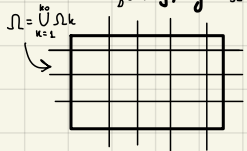
$$y_1 = x_1, y_2 = x_2 + \lambda x_1 \quad \Omega: a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 - \lambda x_1 \leq x_2 \leq b_2 - \lambda x_1$$



"наклонный" параллелепипед

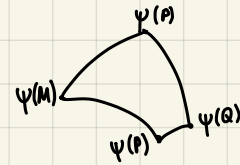
4) Подсказки к формуле (1) в общем случае

$\int_{\Omega} f(y) dy = \int_{\Omega} (f \circ \psi)(x) |\det J\psi| dx$, где $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, Ω - прямоугольник



$M(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, $P(x_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \Delta x_2)$

$N(x_1^{(k)} + \Delta x_1, x_2^{(k)})$, $Q(x_1^{(k)} + \Delta x_1, x_2^{(k)} + \Delta x_2)$



Будем отсчитывать индекс k в Ω_k .

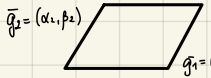
$$\psi(M) = (\psi_1(M), \psi_2(M)) \equiv (y_1, y_2)$$

$$\psi(N) = (\psi_1(N), \psi_2(N)) = (\psi_1(x_1 + \Delta x_1, x_2), \psi_2(x_1 + \Delta x_1, x_2)) \approx \psi_1(x_1 + \Delta x_1, x_2) - \psi_1(x_1, x_2) = \frac{d\psi_1}{dx_1} \Delta x_1 + \bar{O}(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}) \approx \frac{d\psi_1}{dx_1} \Delta x_1 \approx (y_1 + \frac{d\psi_1}{dx_1} \Delta x_1, y_2 + \frac{d\psi_2}{dx_1} \Delta x_1)$$

$$\psi(P) = (\psi_1(x_1, x_2 + \Delta x_2), \psi_2(x_1, x_2 + \Delta x_2)) \approx (y_1 + \frac{d\psi_1}{dx_2} \Delta x_2, y_2 + \frac{d\psi_2}{dx_2} \Delta x_2)$$

$$\psi(Q) = (\psi_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2), \psi_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)) \approx (y_1 + \frac{d\psi_1}{dx_1} \Delta x_1 + \frac{d\psi_1}{dx_2} \Delta x_2, y_2 + \frac{d\psi_2}{dx_1} \Delta x_1 + \frac{d\psi_2}{dx_2} \Delta x_2)$$

Интегральная сумма при $\int_{\Omega} f(y) dy$: $\sum_{k=1}^n f(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}) |\psi(\Omega_k)| \approx \sum_{k=1}^n f(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}) |\det J\psi| |\Omega_k|$



$S = abs \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ глупа

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\psi(\Omega_k)| \approx abs \begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{dx_1} \Delta x_1 & \frac{d\psi_1}{dx_2} \Delta x_2 \\ \frac{d\psi_2}{dx_1} \Delta x_1 & \frac{d\psi_2}{dx_2} \Delta x_2 \end{vmatrix} = \frac{|\Delta x_1| |\Delta x_2| |\det J\psi|}{|\Omega_k|}$$

Примеры замены переменных:

1) $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2$) если преобразование $\psi: \Omega \rightarrow \mathcal{D}$ линейно, т.е. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b$, то $\det J\psi = \det A$

$(x_1, x_2): (2x_1 + x_2)^2 + (-x_1 + 3x_2)^2 \leq 1$: Ω - эллипс

$y_1^2 + y_2^2 = 1$, не крив, т.к. $A^T A \neq I$, где $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: эллипс $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, $S = \pi ab$

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{D}} 1 \cdot \left| \frac{d(x_1, x_2)}{d(y_1, y_2)} \right| dy_1 dy_2 = \frac{1}{|\det A|} \pi = \frac{1}{7} \pi$$

2) $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ($n=2$)

Полярная система $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

3) $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ ($n=3$)

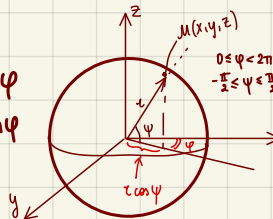
Цилиндрическая система координат:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z: \frac{d(x, y, z)}{d(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

4) $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ ($n=3$)

Сферическая система координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \cos \varphi \sin \psi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

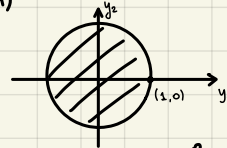


$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi & -r \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \varphi \sin \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \cos \varphi$$

§6. краткие несобственные интегралы.

$\int f(y) dy, D \subset \mathbb{R}^n, y = \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

1) $f(y), D \subset \mathbb{R}^2: y_1^2 + y_2^2 < 1$



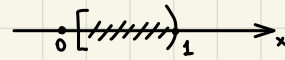
$f(y)$ задана в открытом круге D и неограничена на $D: f(y_1, y_2) = \frac{1}{1-y_1}$

Предела интегральных сумм не существует!



$y_2 \geq y_1^2$ — Нельзя построить интегральную сумму для f :

I. Для $n=1: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx \stackrel{\text{онр.}}{=} \int_0^1 f(x) dx$
через интегр. сумму



$f(x)$ неогр. в т. $x=0$ $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx \stackrel{\text{онр.}}{=} \int_0^{+\infty} f(x) dx, \bigcup_{A>0} [0, A] = [0, +\infty)$

Пусть D — открытое, связное мн-во в $\mathbb{R}^n$.

$\forall x \in D \exists U_\varepsilon(x) \subset D$ — окр-ть т. $x: \sqrt{(x_1-x_1')^2 + \dots + (x_n-x_n')^2} < \varepsilon$

Определение: Последовательность открытых связных мн-в $\{D_n\}_1^\infty$ монотонно исчерпывает D , если

1) $\bigcup_{k=1}^\infty D_k = D$ (т.е. $\forall x \in D \exists D_n, x \in D_n$)

2) $\bar{D}_n \subset D$ ($\bar{D}_n = D_n \cup \partial D_n$) — множество граничных точек

3) $\bar{D}_n \subset D_{n+1}, \forall n$

4) D_n — ограничено, открыто, связно и имеет n -мерный объем

Обозначение: $\{D_m\} \subset D$

Замечание: 2ое определение следует из 1 и 3

т.к. $\bar{D}_m \subset D_{m+1} \subset D$

Примеры: 1) $D: y_1^2 + y_2^2 < 1, D_n: y_1^2 + y_2^2 < 1 - \frac{1}{n^2}$
2) $D = \mathbb{R}^2$ а) $D_n: y_1^2 + y_2^2 < n^2$ б) $|y_1| + |y_2| < n$

Определение: Пусть на D задана ф-ия $f(y)$ такая, что для $\forall$ замкнутого множества $K \subset D$, имеющего n -мерный объем, существует $\int_K f(y) dy$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(y) dy$ и он не зависит от выбора $\{D_n\}$, то говорят, что $f(y)$ интегрируема на мн-ве D (в несобственном смысле), а значение предела — называется значением несобственного интеграла.

$\int_D f(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(y) dy$

Для $f(y)$ заданной в $D, \exists \int_D f(y) dy$, если:

1) $\forall$ огр. замкнутого мн-ва $K \subset D$ имеющего n -мерный объем существует $\int_K f(y) dy$. Аналогичное определение
2) $\forall \{D_m\} \subset D \exists \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m} f(y) dy = a_m$ и $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} a_m$, кот. не зависит от выбора $\{D_m\}$

Лемма: Если $\{D_m\} \subset D$, то для $\forall$ компакта $K \subset D$ (огр. замкнутое) $\exists D_m \supset K$

Доказательство: Рассмотрим $\forall x \in K \Rightarrow \exists m = m(x): x \in D_m$.

$\bigcup_{m=1}^\infty D_m \supset K \Rightarrow$ тем самым, построено покрытие K . Т.к. K — компакт, то из $\forall$ его покрытий можно выделить конечное подпокрытие $\Rightarrow \exists m_1, \dots, m_s: K \subset \bigcup_{j=1}^s D_{m_j} \subset D_{m_s}$

Несобственный интеграл для неотрицательных ф-ий.

Пусть $f(y)$ задана в $D \subset \mathbb{R}^n$ и неотрицательна.

Теорема 1: $\int f(y) dy$ существует $\Leftrightarrow$ хотя бы для одной $\{D_m\} \subset D$ числовая пос-ть $a_m = \int f(y) dy$ была ограничена

Доказательство: $\Rightarrow$ непосредственное следствие определения

$\Leftarrow$ Известно, что $\exists \{D_m\} \subset D$: a_m ограничена. П.к. $\overline{D_m} \subset D_{m+1} \subset \overline{D_{m+1}}$, то $a_m \leq a_{m+1} \forall m$ (аддитивность интеграла и неотрицательной ф-ии), т.е. монотонна $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = I$. $\approx b_n$

Рассмотрим любую другую $\{D_m\} \subset D$ и покажем, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(y) dy = I$

Отметим, что $\forall D_m$ в силу леммы $\exists D_{m*}: \overline{D_m} \subset D_{m*} \subset \overline{D_{m*}}$. Таким образом, $b_m \leq a_{m*} \leq I$.

П.к. $\{b_n\}$ монотонно неубывает, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq I$. В этом рассуждении поменяем ролями a_m и b_m и получим, что $I \leq I' \Rightarrow I = I'$

Пример: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Вспомогательный $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Рассмотрим $\{D_m\} \subset \mathbb{R}^2: \{(x,y) | x^2+y^2 < m^2\}$

$$\int_{x^2+y^2 < m^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^m e^{-r^2} r dr = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^m e^{-t^2} d(t^2) = \pi \cdot (e^{-t^2}) \Big|_0^m = \pi(1 - e^{-m^2}) \rightarrow \pi$$

Рассмотрим другую $\{D_m\} \subset \mathbb{R}^2: \{(x,y) | |x| \leq m, |y| \leq m\}$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq m, |y| \leq m} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-m}^m dx \int_{-m}^m dy e^{-x^2-y^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-m}^m e^{-x^2} dx \int_{-m}^m e^{-y^2} dy \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-m}^m e^{-x^2} dx \right)^2 = 4 \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-x^2} \leq e^{-|x|} \\ |x| \geq 1 \end{array} \right\}, \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$$

Теорема 2: (признак сравнения) Пусть на D : $0 \leq f(y) \leq g(y)$. Тогда

1) из сходимости $\int g(y) dy \Rightarrow$ сходимость $\int f(y) dy$

2) из расходимости $\int f(y) dy \Rightarrow$ расходимость $\int g(y) dy$

Доказательство: Пусть $\exists \int g(y) dy \xrightarrow{T.1} \exists \{D_m\} \subset D: a_m = \int_{D_m} g(y) dy$ ограничена (и монотонна и убывающая) $\Rightarrow \int f(y) dy \leq a_m$ - а значит, они образуют ограниченную последовательность $\xrightarrow{T.1} \int f(y) dy$ сходится.

Замечание: В качестве $g(y)$ в т.2 часто выбирают "модельную" ф-ию $g(y) = \frac{C}{|y|^p}$.

Тогда несложно показать, что для $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$ сходимость при сравнении с $g(y)$ будет $\Leftrightarrow p > n$.

В случае, если $f(y)$ имеет особенность в нуле, то с-ть будет, если $p < n$ ($D_m = \{y | 0 < |y| < m\}$)

Необходимые интегралы от произвольных функций.

Теорема 3: Если $n \geq 2$, то $\int_D f(y) dy$ сходится $\Leftrightarrow \int_D |f(y)| dy$ сходится.

Доказательство: $\Rightarrow$ Введем $f_+(y) = \frac{f(y) + |f(y)|}{2}$, $f_-(y) = \frac{-f(y) + |f(y)|}{2}$ — неотрицательные ф-ии
 $f_+(y) \leq |f(y)| \quad \forall y \in D$
 $f_-(y) \leq |f(y)|$
 $f_+(y) + f_-(y) = |f(y)|$, $f_+(y) - f_-(y) = f(y)$

Пусть $\int_D |f(y)| dy$ сходится $\Rightarrow \forall \{D_m\} \subset D$: $\exists \int_{D_m} |f(y)| dy$. П.е $f(y)$ интегрируема на $\forall D_m$, то $\exists \int_{D_m} f(y) dy$ и кроме того, $0 \leq f_-(y) \leq |f(y)| \Rightarrow \int_{D_m} f_-(y) dy \leq \int_{D_m} |f(y)| dy$. Аналогично, $\int_{D_m} f_+(y) dy \leq \int_{D_m} |f(y)| dy$

Из определения необход. интеграла следует, что если $\exists \int_{D_m} f_{\pm}(y) dy$, то $\exists \int_{D_m} (f_+(y) - f_-(y)) dy$

$\Rightarrow$ Докажем это утверждение от противного:

$\exists \{D_m\} \subset D$. $\int_{D_m} |f(y)| dy$ не ограничена, т.е. $\rightarrow +\infty$ (при этом $\int_{D_m} f(y) dy$ ограничена)

Из этой посылки $\{D_m\}$ выберем подпоследовательность так, чтобы ка ней: $\int_{D_{m_k}} |f(y)| dy \geq \int_{D_m} |f(y)| dy + 2m + 4$

Далее считаем, что это нерав. выполнено на D_m . $\int_{D_{m_k}} |f(y)| dy \geq \int_{D_m} |f(y)| dy + 2m + 4, \forall m$.

$\int_{D_{m+1}} = \int_{D_m} + \int_{P_m}$ $\int_{P_m} |f(y)| dy \geq 2 \int_{D_m} |f(y)| dy + 2m + 4$. Т.к. $|f(y)| = f_+(y) + f_-(y)$, то $\int_{P_m} |f(y)| dy = \int_{P_m} f_+(y) dy + \int_{P_m} f_-(y) dy \leq 2 \int_{P_m} f_+(y) dy \Rightarrow \int_{P_m} f_+(y) dy \geq \int_{D_m} |f(y)| dy + 2m + 4$

Выберем разбиение P_m так, чтобы: $0 \leq \int_{P_m} f_+(y) dy - \sum_{k \in P_m} m_k |P_{mk}| \leq 1$. Тогда $\sum_{k \in P_m} m_k |P_{mk}| \geq \int_{D_m} |f(y)| dy + m + 1$

$m_k = \inf_{y \in P_{mk}} f_+(y) \geq 0$. Оставим в каждой ит. части только те слагаемые, в кот. $m_k > 0$.

$\sum_{k: m_k > 0} m_k |P_{mk}| \geq \int_{D_m} |f(y)| dy + m + 1$, $y \in P_{mk}: f_+(y) \equiv f(y)$. Левая часть — ит. интеграл от $f(y)$ по $\bigcup P_{mk} \equiv \tilde{D}_m$

$\Rightarrow \int_{D_m} f(y) dy \geq \int_{D_m} |f(y)| dy + m + 1$, $\int_{D_m} f(y) dy \geq \int_{D_m} |f(y)| dy$

Сложим: $\int_{D_m} f(y) dy \geq m + 1$, $\tilde{D}_m \cup \tilde{D}_m \subset \tilde{D}_{m+1} \subset \tilde{D}_{m+2} \cup \tilde{D}_{m+2} \subset \tilde{D}_{m+3}$

Построенная нами конструкция дает "почти" последовательность $\{\tilde{D}_{2m}\} \subset D$. Единственный недостаток —

возможная несвязность $\tilde{D}_{2m}^*$. Соединим несвязные компоненты $\tilde{D}_m^*$ с ит-вом D_m с помощью "узких каналов"

Выбор этих "каналов" производится следующим образом: $M \equiv \sup |f(y)|$, K — кол-во несвязных компонент в $\tilde{D}_m^*$.

Выберем "каналы" C_k так, чтобы n -мерный объем каждого из этих C_k : $|C_k| \leq \frac{1}{M \cdot K}$;

$|\int_{C_k} f(y) dy| \leq M \cdot |C_k| \leq \frac{1}{K} \Rightarrow$ суммарный вклад $\int_{C_k} f(y) dy$. $\tilde{D}_m^* \cup \bigcup_{k=1}^K C_k \equiv \tilde{D}_m^{**}$ — связное ит-во

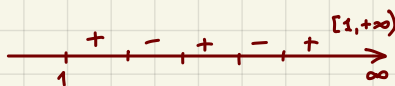
$\int_{\tilde{D}_m} f(y) dy \geq m + 1 \Rightarrow \int_{\tilde{D}_m^{**}} f(y) dy \geq m$. С другой стороны, $\{\tilde{D}_{2m}^{**}\}$ монотонно исчерпывает D .

Противоречие с тем, что $\int_D f(y) dy$ сходится.

Пример: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ — с.х. условие

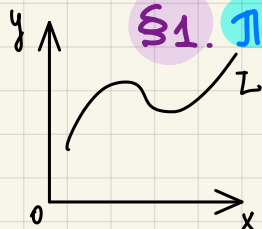
$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\substack{x \geq 1 \\ \sin x > 0}} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{\substack{x \geq 1 \\ \sin x < 0}} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [2n\pi, \pi + 2n\pi] \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\pi + 2n\pi, 2\pi(n+1))$$



Глава IV. Криволинейные интегралы.

§1. Понятие криволинейного интеграла 1 и 2 родов.



L : спрямляемая, без точек самопересечения, параметризуемая
 $\{x=\varphi(t), y=\psi(t), a < t < b\}$

$\forall t_1, t_2: (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$

Считаем, что на L заданы гр-ши $f(x, y), P(x, y), Q(x, y)$.

Возьмем разбиение $[a, b]$ на части: $a=t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n=b$.

Соответствующий участок L для $t \in [t_{k-1}, t_k]$: L_k - спрямляемая часть L .

На каждой части рассмотрим промежуточную точку $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k \leadsto (\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \in L_k$

Введем следующие интегральные суммы:

$$1) G_1(f) = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot |L_k| \quad \Delta x_k$$

$$2) G_2(P) = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) \quad \Delta x_k$$

$$3) G_3(Q) = \sum_{k=1}^n Q(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})) \quad \Delta y_k$$

Введем параметр $d = \max_k |L_k|$, характеризующий "малость" разбиения

1) $\int f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} G_1(f)$ при $d \rightarrow 0$ - криволинейный интеграл 1-го рода

2) $\int P(x, y) dx = \lim_{d \rightarrow 0} G_2(P)$ при $d \rightarrow 0$ } криволинейный интеграл

3) $\int Q(x, y) dy = \lim_{d \rightarrow 0} G_3(Q)$ при $d \rightarrow 0$ } 2-го рода

$\int (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$ - общий кр. интеграл 2-го рода

Определение: Число I_1 называется пределом интегральных сумм $G_1(f)$ при $d \rightarrow 0$, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall$ разбиения L с диаметром $d < \delta$ при $\forall$ выборе промежуточных точек: $|G_1(f) - I_1| < \varepsilon$

§2. Условия существования криволинейных интегралов.

Пусть L - гладкая: $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывны на $[a, b]$

L не имеет осечек: $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$ в $[a, b]$

Пусть f, P, Q - непрерывны вдоль кривой L .

Теорема: криволинейные интегралы существуют и справедливы:

$$1) \int f(x, y) d\sigma = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad 2) \int P dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad 3) \int Q dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t) dt$$

Доказательство: Рассмотрим для 1):

$$\text{Пусть } L = \bigcup_{k=1}^n L_k: \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

$$G_1(f) = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

$$G_1(f) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

П.к. $f(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f(\varphi(t), \psi(t))$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, то:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \text{ для } \forall t, \tau_k: |t - \tau_k| < \delta: |f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| < \varepsilon / |L| \Rightarrow |G_1(f) - \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt| < \varepsilon$$

Рассуждение для 2): (для P)

$$\text{Пусть } L = \bigcup_{k=1}^n L_k: \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$G_2(P) = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt$$

$$G_2(P) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))) \varphi'(t) dt$$

П.к. $f(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f(\varphi(t), \psi(t))$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, то:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \text{ для } \forall t, \tau_k: |t - \tau_k| < \delta: |f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| < \varepsilon \Rightarrow |G_2(P) - \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt| < \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq \varepsilon \cdot \max_{a \leq t \leq b} |\varphi'(t)| \cdot (b-a)$$

Рассуждение для 3) аналогично.

Замечание: 1) Криволинейные интегралы 2-го рода меняют знак, если для кривой L вместо параметризации от A до B

заменить на параметризацию от B до A : $\int_{A \rightarrow B} P dx = - \int_{B \rightarrow A} P dx$; $\int_{A \rightarrow B} Q dy = - \int_{B \rightarrow A} Q dy$

Для криволинейных интегралов 1-го рода направление прохода по L не имеет значения

2) Определение криволинейных интегралов не зависит от способа параметризации кривой: $G_1(f) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k) |L_k|$, $G_2(P) = \dots$

3) Рассматриваемая кривая L может быть замкнутой, иметь самопересечения

4) Криволинейные интегралы можно рассматривать и для кусочно-гладких кривых L .

5) Крив. интеграл обладает теми же св-вами, что и обычный: линейность, аддитивность, оценка |...|, формула ср. зн..

Глава V Поверхностный интеграл

§1. Понятие поверхности

1. Плоскость в $\mathbb{R}^3$:

а) Общее уравнение: $Ax + By + Cz + D = 0, C \neq 0: z = ax + by + d \equiv g(x, y)$. Плоскость = "график" ф-ии $z = g(x, y)$.

Пусть на $\mathbb{R}^2 \supset G$ - область (открытое и связное)

Часть плоскости $\{(x, y, z) | z = g(x, y), (x, y) \in G\}$

б) $\vec{a}, \vec{b}$ - неколлинеарны в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2 \quad \{(x, y, z) | x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto$ вектор-функция $f(u, v)$ ($\vec{f}(u, v)$) которая $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Плоскость = образ f .

Часть плоскости $\{(x, y, z) = f(u, v) | (u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2\}$

непр-на на G

2. Пусть задана ф-ия $z = g(x, y), (x, y) \in G$ - область $\mathbb{R}^2, \{(x, y, z) | z = g(x, y), (x, y) \in G\}, g(x, y) \in C(G)$

Подобное отображение (являясь заданной поверхностью, график ф-ии $g(x, y)$):

- если $\{(x_k, y_k) \subset G$ сходится, то сходится $\{(x_k, y_k, g(x_k, y_k))\}$

- обладает обратным $(x, y, g(x, y)) \rightarrow (x, y)$, которое также непрерывно

$$x = u, y = v, z = g(u, v)$$

Пусть задана вектор-функция $f: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \forall (u, v) \in G$

Потрудимся, чтобы f обладало следующими свойствами:

1) f - взаимно однозначное между $G \leftrightarrow f(G), f$ - гомеоморфизм

2) f, f^{-1} - были непрерывными отображениями из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$

Определение: Элементарной (гладкой) поверхностью назовём мн-во $f(G) \subset \mathbb{R}^3$, где f - гомеоморфизм $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, G$ - открытый круг в $\mathbb{R}^2$

$$z = x^2 + y^2; \quad G \xrightarrow{f} G_1$$

Пример: Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

1) Полушара ($z > 0$): $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \equiv g(x, y), G = \{(x, y) | x^2 + y^2 < R^2\} \Rightarrow$ это элементарная пов-ть

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \psi \\ y = R \sin \varphi \sin \psi \\ z = R \cos \psi \end{cases} \begin{cases} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi \end{cases} \quad (0, 0, R), \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Определение: $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ - простая поверхность, если

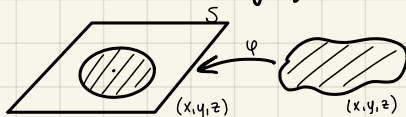
1) Φ связно; 2) $\forall$ точки $M \in \Phi \exists$ окр-ть $\Phi \cap \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\}$ - элементарная пов-ть

• Плоскость, эллипсоид, эллиптический параболоид, однополостный гиперболоид, цилиндр эллиптический - простые пов-ти

Замечание! Если Φ - простая поверхность, то для $\forall$ гомеоморфизма $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ мн-во $\varphi(\Phi)$ - простая пов-ть

Определение: Общей поверхностью в $\mathbb{R}^3$ называется множество S , которое является образом простой поверхности $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ при локальном гомеоморфизме $\varphi \forall M \in \Phi \exists$ окрестность этой т. M , которая гомеоморфно отображается на S .

Определение: Общая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется k раз дифференцируемой, если для $\forall$ точки $M \in S \exists$ окрестность (на S) допускающая k раз дифференцируемую параметризацию.



$$\Phi \subset \mathbb{R}^3 \quad \Phi = f(G): \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \left\| \varphi \circ f \right. \quad \text{Если } k=1, \text{ то } S\text{-гладкая поверхность} \\ (u, v) \in G$$

Задача: Даны 3 ф-ии $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \text{область } \mathbb{R}^2$. Введи следующую матрицу (предположим, что эти ф-ии 1 раз дифференцируемы)

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \equiv A \leftarrow (2)$$

Теорема: Описание отображение задаёт гладкую поверхность, если $\text{rg } A = 2$ во всех точках области задания, и все ЧП первого порядка непрерывны.

Доказательство: Пусть $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ (*)

$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \Rightarrow$ в некоторой окрестности $\exists$ обратное отображение той точки, где (*), $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, которое непрерывно и непрерывно дифференцируемо в соответствующей окрестности $\Rightarrow z = (u(x, y), v(x, y))$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая ф-ция (x, y) в соответствующей окрестности.

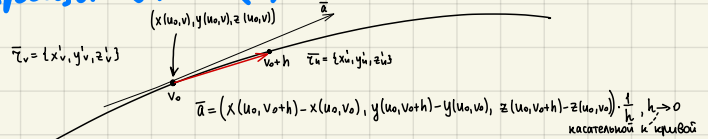
Определение: Точка поверхности, описанной параметрическими уравнениями (1), называется **косой** (регулярной), если $\text{rg } A = 2$, в противном случае она кр-ая особая.

Геометрический смысл матрицы A (2)

Фиксируем $u = u_0$, тогда из (1) получится

кривая $\begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}$, лежащая на пов-ти.

$$u \cdot \bar{\tau}_u = \{x'_u, y'_u, z'_u\}$$



Если теперь фиксировать $v = v_0$, то получится второй вектор касательной к коорд. линии на поверхности. Иными словами, строки A — координаты векторов, касательных к поверхности, т.е. направляющие векторы касательной плоскости к поверхности.

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}, \text{rg } A = 2 - \text{признак косой точки}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_u &= (x'_u, y'_u, z'_u) \\ \bar{\tau}_v &= (x'_v, y'_v, z'_v) \end{aligned} \quad \begin{aligned} (v = v_0) \cap S \\ (u = u_0) \cap S \end{aligned} \quad \text{направляющие векторы касательной плоскости в точке, соотв. } (u_0, v_0)$$

Касательная плоскость в т. $M_0 \in S$ — это такая плоскость, проходящая через т. M_0 : $\forall$ т. $M \in S$ при $M \rightarrow M_0$, тогда угол между секущей M_0M и плоскостью $\rightarrow 0$.

Вектор $= f(u_0 + h_1, v_0 + h_2) - f(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial u} h_1 + \frac{\partial f}{\partial v} h_2 + o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})$
 Если левую часть поделить на $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, тогда правая часть $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$ — линейная комбинация $\bar{\tau}_u, \bar{\tau}_v$
 $h_1 = \cos \alpha \cdot h, h_2 = \cos \beta \cdot h, \text{rg } A = 2$ — не особая точка поверхности

Иными образом, вектор $[\bar{\tau}_u, \bar{\tau}_v]$ является нормальным вектором для касательной плоскости к S, и параллелен вектору нормали к поверхности S. $\bar{n} = [\bar{\tau}_u, \bar{\tau}_v] \neq 0$, если точка не особая.

П.к. в каждой точке поверхности S определен вектор нормали $\bar{n} = \bar{n}(M), M \in S$, то говорят, что на S задано векторное поле нормалей.

Лемма Мебиуса —

односторонняя поверхность.



$$|\bar{n}(M) - \bar{n}(M_1)| \rightarrow 0, \text{ если } M \rightarrow M_1$$

на данном контуре выбрано непрер.-ое поле нормалей

Если на поверхности непрерывное поле нормалей, то поверхность кр-ая двусторонней, иначе — односторонней

Определение: Поверхность называется **ограниченной**, если $\exists$ шар конечного радиуса с центром в начале координат, который эту поверхность целиком содержит.

Определение: Поверхность называется **замкнутой**, если любая фундаментальная последовательность точек, лежащих на поверхности, сходится к точке поверхности.

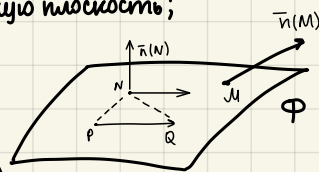
Поверхность Φ имеет **размер меньше $\delta > 0$** , если $\exists$ шар радиуса $\varepsilon < \delta$, содержащую эту пов-ть.

Лемма 1: Пусть Φ -шагкая, $M_0 \in \Phi$ -не особая точка, тогда $\exists$ окр-ть т. M_0 на Φ , которая однозначно проектируется на касательную пл-ть к Φ , проведенную в $\forall$ точке этой окр-ти.

Доказательство: Предположим, что это не так. Для $\forall$ (рациональной) не особой точки M_0 , рассмотрим такую её окрестность: 1) эта окр-ть однозначно проектировалась на какую-либо координатную плоскость; 2) любые 2 нормали к плоскости этой окр-ти на Φ составили угол $< \pi/4$

Пусть данная окр-ть не однозначно проектируется на касательную плоскость к Φ , проведенную в некоторой $M \in \Phi$. $\Rightarrow \exists PQ \in$ окр-ти, которые проектируются в одну точку касательной плоскости в т. M , т.е. $\overline{PQ} \parallel \bar{n}_M$. Соединим P и Q линией на пов-ти (по т. Лагранжа)

$\exists N \in$ поск. кривой, соед. P и Q , т.к. $\bar{N}$ -касат. к $PQ \parallel \overline{PQ}$ и $\bar{N} \in$ касат. пл-ти в т. N , но тогда $\bar{n}(N) \perp \bar{n}(M)$, а N и $M \in$ окр-ти $\Rightarrow$ противоречие условию 2).



Лемма 2: Пусть Φ -шагкая, без особых точек, ограниченная и полная. Тогда $\exists \delta > 0$:

$\forall$ часть Φ размера $< \delta$ однозначно проектир. на касат. пл-ть, проведен. в $\forall$ своей точке.

Доказательство: Предположим, что для $\forall \delta_n = 1/n \exists$ часть $\Phi_n \subset \Phi$ размера $< 1/n$ и $\exists M_n \in \Phi_n$, т.е. Φ_n не однозначно проектируется на касательную пл-ть к Φ_n в M_n . $\{M_n\} \subset \Phi$ -ограниченная пош-ть $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпослед-ть $\{M_{k_i}\} \rightarrow M_0 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow M_0 \in \Phi$. Поскольку M_0 -не особая на $\Phi \Rightarrow \exists$ окр-ть т. M_0 , удовлетворяющая требованиям леммы 1. $M_0 \in \Phi \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: M_{k_i} \in \Phi_{k_i} \subset \Phi_0 \Rightarrow \Phi_{k_i}$ удовлетворяет требованиям леммы 1 $\Rightarrow$ противоречие.

Лемма 3: Пусть Φ удовлетворяет условиям леммы 2, тогда $\exists \delta > 0$, что любая часть Φ размера меньше δ однозначно проектируется хотя бы на одну координатную плоскость.

Доказательство: аналогично лемме 2.

Лемма 4: Пусть Φ -шагкая, без особых точек, ограниченная, полная, двусторонняя.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: в $\forall$ части $\Phi_\varepsilon \subset \Phi$ размера меньше δ выполняется: $1 - \varepsilon < \cos(\bar{n}(M_1), \bar{n}(M_2)) \leq 1$

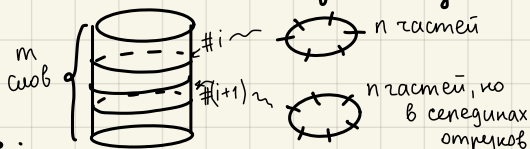
Доказательство: Пик Φ -двусторонняя, но на $\Phi \exists$ непрерывное поле нормалей $\bar{n}(M) \leftarrow$ непрерывная вектор-ф-ия $\exists$ её переменных, которая задана на ограниченном, полном мн-ве $\Phi \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ к $F_0(M)$ применима т. Кантора $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0: |\overline{M_1 M_2}| < \delta_1 \Rightarrow |\bar{n}_0(M_1) - \bar{n}_0(M_2)| < \varepsilon$
 $\frac{\bar{n}(M)}{|\bar{n}(M)|} = \bar{n}_0(M)$ - также непрерывное поле нормалей.

$$|\bar{n}_0(M_1) - \bar{n}_0(M_2)|^2 < \varepsilon^2 \rightarrow |\bar{n}_0(M_1)|^2 + |\bar{n}_0(M_2)|^2 - 2(\bar{n}_0(M_1), \bar{n}_0(M_2)) = |\bar{n}_0(M_1)| \cdot |\bar{n}_0(M_2)| \cos(\wedge) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos(\bar{n}_0(M_1), \bar{n}_0(M_2)) < \varepsilon^2 \Rightarrow 1 - \varepsilon^2/2 \leq \cos(\bar{n}(M_1), \bar{n}(M_2)) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{2\varepsilon_1} \Rightarrow \delta = \delta_1(\sqrt{2\varepsilon_1})$$

§2. Площадь поверхности

Пусть поверхность S - гладкая, без особых точек, ограниченная, полная, двусторонняя.



плотность полуэллипсоид многогранника не оп.

$S \subset \mathbb{R}^3$:

1) Рассмотрим на S $\forall$ какое-то число гладких спрямляемых кривых, тем самым $S = \bigcup_{k=1}^{k_0} S_k$.

Выберем такое разбиение поверхности S , чтобы $\forall$ часть S_k односторонне проектировалась на касательную плоскость в $\forall$ своей точке (возможно в силу п. 1)

2) Выберем на S_k $\forall$ точку M_k ; проведем в ней касат. плоскость и спроектируем S_k на нее $\leadsto S_k^*$ - плоская область. Тогда S_k^* квадрируема, т.к. ∂S_k^* - проекция ∂S_k , причем $\partial S_k = \emptyset$ (замкнутость конечного числа спрямляемых гладких кривых $\Rightarrow$ площадь $\partial S_k^* = 0 \Rightarrow S_k^*$ квадрируема)

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \xrightarrow[\text{на } Oxy]{\text{проекции}} \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

Пусть $G_k = |S_k^*| = \{ \text{площадь } S_k^* \}$

3) Составим сумму этих площадей проекций: $\sum_{k=1}^{k_0} G_k$ (1)

Пусть Δ_k - размер (радиус $\min$ шара, содержащего S_k) S_k и $d = \max_{1 \leq k \leq k_0} \Delta_k$ диаметр разбиения

Определение: Число G - предел суммы $\sum_{k=1}^{k_0} G_k$ (1) при $d \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ разбиение пов-ти S с диаметром $d < \delta$ и $\forall$ выбора точек $M_k \in S_k, k = \overline{1, k_0}$: $|\sum_{k=1}^{k_0} G_k - G| < \varepsilon$

Если G существует, то говорят, что пов-ть S - квадрируема и G - площадь S .

Замечание: Если пов-ть S - кусочно-гладкая, т.е. $S = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$, где Φ_i - гладкие, попарно не пересекающиеся во внутр. точках, то площадь $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \text{площадь } \Phi_i$

Теорема: $\forall$ ограниченная, гладкая, полная, без особых точек, двусторонняя пов-ть квадрируема.

Доказательство:

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases} : (u,v) \in \Omega \rightarrow S$$

I. 1) Пусть S допускает единую параметризацию - они непрерывно дифференцируемы

$$A = \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \Rightarrow \iint_{\Omega} |\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v| du dv = G$$

(можно взять всегда $\exists$ инт-л, т.к. $\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v$ - непрер. $\Rightarrow |\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v|$ - непрер. в Ω .)

Докажем, что G - площадь S .

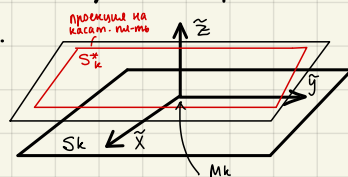
Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0$, выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы выполнялись утв. леммы 2 и 4 из §1:

① $\forall$ часть пов-ти S размера $< \delta$ односторонне проектировалась на касат. пл-ть, проведенную в $\forall$ точке этой части;

② $\forall$ часть $S_* \subset S$ размера $< \delta$ было выполнено: $1 - \varepsilon/G < \cos(\vec{n}(M_1), \vec{n}(M_2)) \leq 1, M_1, M_2 \in S_*$

Рассмотрим $\forall$ разбиение S на части $S_k: S = \bigcup_{k=1}^{k_0} S_k$ с диаметром $< \delta$.

Тогда $\forall$ часть S_k описывается: $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}, (u,v) \in \Omega_k$, тогда $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k_0} \Omega_k$



Введем на S_k^* локальную прямоугольную с-му координат,

согласованную с проведенной в т. M_k касат. пл-тью: $\exists \parallel \vec{n}(M_k)$, оси $\tilde{x}, \tilde{y} \parallel$ касат. пл-ти, с-ма коорд. прав.

$Oxyz \Rightarrow O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ - изменилась система координат.

Параметризация части S_k пов-ти, конечно, изменилась, но (позже) будет показано, что результат вычисления останется тем же. Пока проведем все вычисления для согласованной параметризации.

Для простоты опустим $\sim$ над гр-ными и переменными: $\vec{r}_u = (x'_u, y'_u, z'_u), \vec{r}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$

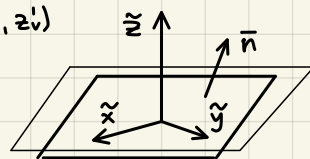
$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \left\{ \underbrace{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}_A - \underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}_B, \underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}_C \right\}$$

Тогда

Направление косинус-вектора $\vec{n}(M)$, соотв. 3-ей координате: $\cos(\vec{n}, \vec{Oz}) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} > 0$

(будем считать, что локальная с-ма координат выбрана так, что угол $\angle \vec{n}(M)$ и $\vec{n}(M_k)$ - острый)

$$\iint_{\Omega} |\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v| du dv = \iint_{\Omega} \sqrt{A^2+B^2+C^2} du dv = \iint_{\Omega} \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C} C du dv \stackrel{\text{гр-ла гр. замены}}{=} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C} \right\} (u^*, v^*) \iint_{\Omega} C du dv =$$



$$= \frac{1}{\cos(\vec{n}(M_k), \vec{Oz})} G_k \Rightarrow G_k = \cos(\vec{n}(M_k), \vec{Oz}) \iint_{\Omega_k} |\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v| du dv$$

$$\left| \sum_{k=1}^{k_0} G_k - G \right| = \left| \sum_{k=1}^{k_0} \cos(\vec{n}(M_k), \vec{Oz}) \iint_{\Omega_k} |\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v| du dv - \iint_{\Omega} |\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v| du dv \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} (1 - \cos(\vec{n}(M_k), \vec{Oz})) \cdot \iint_{\Omega_k} |\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v| du dv \quad (\text{т.к. } M_k \in S_k \Rightarrow 1 - \cos(\vec{n}(M_k), \vec{Oz}) < \varepsilon/G)$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{k_0} G_k - G \right| \leq \varepsilon/G \cdot \iint_{\Omega} |\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v| du dv = \varepsilon$$

$$\iint_{\Omega} C du dv = \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} du dv = \iint_{\Omega} dx dy = |S_k^*| = G_k$$

2) Если у S нет единой параметризации, то в силу л. 3 § 1, S можно разбить на конечное число частей: $S = \bigcup \Phi_i$ так, чтобы каждая часть Φ_i однозначно проектировалась хотя бы на одну координату $\Rightarrow$ на этой части возможна единая параметризация $Oxy: z = z(x, y)$
 Далее по аддитивности площади и интеграла все хорошо. $Oyz: x = x(y, z)$

3) Докажем, что формула площади поверхности не зависит от её параметризации.
 Пусть $S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ Другая параметризация получается: $\begin{cases} u = u(\xi, \eta) \\ v = v(\xi, \eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) = \tilde{x}(\xi, \eta) \\ y = y(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) = \tilde{y}(\xi, \eta) \\ z = z(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) = \tilde{z}(\xi, \eta) \end{cases}$

Докажем, что $\iint_S |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv = \iint_{\tilde{S}} |\vec{r}_{\xi}, \vec{r}_{\eta}| d\xi d\eta$ для новой параметризации

$$x'_{\xi} = x'_u \cdot u'_{\xi} + x'_v \cdot v'_{\xi}, \quad y'_{\xi} = y'_u \cdot u'_{\xi} + y'_v \cdot v'_{\xi}, \quad z'_{\xi} = z'_u \cdot u'_{\xi} + z'_v \cdot v'_{\xi}$$

$$\begin{pmatrix} x'_{\xi} & y'_{\xi} & z'_{\xi} \\ x'_{\eta} & y'_{\eta} & z'_{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\xi} & v_{\xi} \\ u_{\eta} & v_{\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

$$[\vec{r}_{\xi}, \vec{r}_{\eta}] = \det \begin{pmatrix} u_{\xi} & v_{\xi} \\ u_{\eta} & v_{\eta} \end{pmatrix} \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$$

$$\Rightarrow \iint |\vec{r}_{\xi}, \vec{r}_{\eta}| d\xi d\eta = \iint |\vec{r}_u, \vec{r}_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta = \iint |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv$$

$$|\vec{r}_{\xi}, \vec{r}_{\eta}| = \left| \det \begin{pmatrix} u_{\xi} & v_{\xi} \\ u_{\eta} & v_{\eta} \end{pmatrix} \right| \cdot |\vec{r}_u, \vec{r}_v|$$

Замечание: $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\hat{a}, \hat{b}) \Rightarrow |\vec{a}, \vec{b}|^2 + (\vec{a}, \vec{b})^2 = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\hat{a}, \hat{b})$$

Введем: $|\vec{r}_u|^2 = E, \quad |\vec{r}_v|^2 = G, \quad (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = F \Rightarrow |\vec{r}_u, \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$

§3. Поверхностный интеграл

Пусть S - ограниченная, полная, гладкая, без осовых точек, двусторонняя пов-ть и в силу теоремы 1 имеет площадь.

Пусть $\vec{n}(M)$, $M \in S$ - непрерывное поле единичных нормалей.

Рассмотрим ф-ию $f(M) = f(x, y, z)$, определенную на S .

Рассмотрим разбиение $S = \bigcup_{k=1}^N S_k$, диаметр разбиений $d = \max$ размер S_k , пусть $|S_k| = \delta_k$ и в части S_k выберем точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$.

Введем следующие интегральные суммы для f на S :

$$S_0(f) = \sum_{k=1}^N f(M_k) \cdot \delta_k$$

$$S_1(f) = \sum_{k=1}^N f(M_k) \cdot \cos \alpha_k \cdot \delta_k$$

$$\text{где } \vec{n}(M) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

$$S_2(f) = \sum_{k=1}^N f(M_k) \cdot \cos \alpha_k \cdot \delta_k$$

$$S_3(f) = \sum_{k=1}^N f(M_k) \cdot \cos \gamma_k \cdot \delta_k$$

Определение: Интегральные суммы $S_0(f)$ [$S_j(f)$, $j=1,2,3$] имеют предел при $d \rightarrow 0$ равный I_0 [I_j], если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ разбиение с $d < \delta$ и $\forall$ выбором точек $M_k \in S_k$, $k=1, \dots, N$: $|S_0(f) - I_0| < \varepsilon$ [$|S_j(f) - I_j| < \varepsilon$]

$I_0 = \iint_S f(M) dG$ - поверхностный интеграл 1-ого рода

$$I_1 = \iint_S f(M) \cos \alpha dG$$

$$I_2 = \iint_S f(M) \cos \beta dG$$

$$I_3 = \iint_S f(M) \cos \gamma dG$$

поверхностные интегралы 2-ого рода

$I_1 + I_2 + I_3$ - общий поверхностный интеграл 2-ого рода.

Из определения следует, что если выберем группу сторон, то первые интегралы 1-ого рода не изменяются, а 2-ого рода не изменяются.

Теорема: Пусть $f(M)$ - непрерывная ф-ия на S . Пусть, кроме того, пов-ть S допускает единую параметризацию $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$. Тогда все поверхностные интегралы от $f(M)$ существуют и вычисляются: $\iint_S f(M) dG = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv$, остальные пов-ные инт-лы аналогично.

Доказательство: Рассмотрим разбиение пов-ти $S = \bigcup S_k$ с диаметром $d < \delta$.

Получим $S_0(f) = \sum_{k=1}^N f(M_k) \delta_k = \sum_{k=1}^N F(u_k, v_k) \cdot \iint_{\Omega_k} |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv$, т.к. $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $x_k = x(u_k, v_k)$, $y_k = y(u_k, v_k)$, $z_k = z(u_k, v_k)$

$S_k: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega_k$, где $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k \Rightarrow S_0(f) = \iint_{\Omega} F(u, v) |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv =$

$$\sum_{k=1}^N \left\{ F(u_k, v_k) \iint_{\Omega_k} |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv - \iint_{\Omega_k} F(u, v) |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv \right\} = \sum_{k=1}^N \iint_{\Omega_k} \{ F(u_k, v_k) - F(u, v) \} |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv$$

т.к. ф-ия $F(u, v)$ - непрерывна на Ω , то $F(u, v)$ - равномерно непрерывна на Ω (т.к. Ω - отр. и замкнуто) $\Rightarrow$

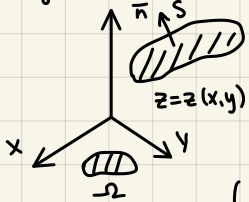
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta^* > 0$, т.ч. $\forall (u', v'), (u'', v'') \in \Omega$, $\sqrt{(u' - u'')^2 + (v' - v'')^2} < \delta^* \Rightarrow |F(u', v') - F(u'', v'')| < \varepsilon / G \Rightarrow$

$$|S_0(f) - \iint_{\Omega} F(u, v) |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv| \leq \sum_{k=1}^N |F(u_k, v_k) - F(u'', v'')| \iint_{\Omega_k} |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv < \varepsilon / G \cdot \sum_{k=1}^N \iint_{\Omega_k} |\vec{r}_u, \vec{r}_v| du dv = \varepsilon$$

т.к. ф-ия параметризации пов-ти $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ непрерывна в Ω вместе со своим обратным

отображением, то $\sqrt{(u' - u'')^2 + (v' - v'')^2} < \delta^* \Rightarrow \text{dist}(M', M'') < \delta$

$\iint_S f(M) \cos \gamma dG$. Выберем сторону пов-ти S так, чтобы $\vec{n}(M) \uparrow \uparrow [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, $\vec{n}(M) = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|} = \frac{1}{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|} \cdot \begin{Bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Bmatrix}$



Выберем сторону этой пов-ти S так, чтобы $\vec{n}(M)$ всегда составлял острый угол с положительным направлением оси Oz .

Выпишем формулу для этого пов-ного интеграла 2-ого рода в случае, когда

$S: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$.

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix}$$

$$Oz \uparrow \uparrow [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{vmatrix} = \{-z_u, -z_v, 1\}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2}}; \quad dG = \sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2} du dv \quad \text{и} \quad \iint_S f(M) \cos \gamma dG = \iint_{\Omega} f(u, v, z(u, v)) du dv = \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

В этой связи часто для пов-ных интегралов 2-ого рода используют следующее обозначение:

$$\iint_S f(M) \cos \gamma dG = \iint_S f(x, y, z) dx dy; \quad \iint_S f(M) \cos \alpha dG = \iint_S f(x, y, z) dy dz; \quad \iint_S f(M) \cos \beta dG = \iint_S f(x, y, z) dz dx$$

Для любого обозначения для (общего) пов-ного интеграла 2-ого рода $\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ можно придать нормальный вид с помощью т.н. гурьевской формулы.

Глава VI. Основные операции теории полей.

§1. Преобразование базисов и координат. Инварианты

1° Взаимные базисы.

Пусть E^3 - трехмерное евклидово пространство: $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ - ортонорм. базис: $(\bar{e}_k, \bar{e}_j) = \begin{cases} 1, k=j \\ 0, k \neq j \end{cases} = \delta_{kj}$
 $\forall x \in E^3: \bar{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \bar{e}_k \Leftrightarrow x_k = (\bar{x}, \bar{e}_k)$

Рассмотрим теперь $\forall$ базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ в E^3 .

Определение: Базис $\{\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3\}$ - взаимный к рассмотренному базису, если $(\bar{e}_k, \bar{e}^j) = \delta_k^j$

Замечание: Взаимный базис можно построить с помощью векторных операций:

$$\bar{e}^1 = \frac{[\bar{e}_2, \bar{e}_3]}{(\bar{e}_1, [\bar{e}_2, \bar{e}_3])}, \quad \bar{e}^2 = \frac{[\bar{e}_3, \bar{e}_1]}{(\bar{e}_2, [\bar{e}_3, \bar{e}_1])}, \quad \bar{e}^3 = \frac{[\bar{e}_1, \bar{e}_2]}{(\bar{e}_3, [\bar{e}_1, \bar{e}_2])}$$

Утверждение 1: $\forall \bar{x} \in E^3: \bar{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \bar{e}_k \Leftrightarrow x_i = (\bar{x}, \bar{e}^i)$

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \bar{e}_k, \quad (\bar{x}, \bar{e}^k) = \dots = x_k, \quad \bar{x} = \sum_{j=1}^3 x_j \bar{e}^j \Leftrightarrow x_j = (\bar{x}, \bar{e}_j)$$

Утверждение 2: $\bar{e}^k = \sum_{i=1}^3 (\bar{e}^k, \bar{e}^i) \bar{e}_i, \quad \bar{e}_j = \sum_{i=1}^3 (\bar{e}_i, \bar{e}_k) \bar{e}^i$

2° Преобразование базисов:

e^*, e_* - пара взаимных базисов; f^*, f_* - новая пара взаимных базисов;

Если B - матрица перехода от e_* к f_* . Если C - матрица перехода от e^* к f^* . То какая связь м/д B и C ?

Утверждение 3: Матрицы перехода связаны соотношением $C^{-1} = B^T$

$$B = (b_{ij}): \text{столбцы } B - \text{это векторы } f_* \text{ в } e_*, \quad f_k = \sum_{i=1}^3 b_{ik} e_i, \quad C = (c_{ij}): f^k = \sum_{j=1}^3 c_{jk} e^j, \quad S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{П.а. } f_*, f^* - \text{взаимны, то } (f_k, f^l) = \delta_k^l \Rightarrow (\sum_{i=1}^3 b_{ik} e_i, \sum_{j=1}^3 c_{jl} e^j) = \delta_k^l \Rightarrow \sum_{i,j} b_{ik} c_{jl} (e_i, e^j) = \delta_k^l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} b_{ik} c_{jl} \delta_{ij} = \sum_{i,j} b_{ik} c_{ji} = \delta_k^l \Rightarrow B^T C = I$$

Замечание: При переходе от e_* к f_* и от e^* к f^* координаты одного и того же вектора $x \in \mathbb{R}^3$ связаны между собой с помощью введения матриц перехода. Если $x = \sum_i x_i e_i = \sum_j y_j f_j$, то $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

3° Инварианты линейных операторов в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим линейный оператор $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Определение: Величина $\sum (e_i, A e^i)$ - **дивергенция** оператора A . $\sum (e_i, A e^i) = \text{div } A$.

Утверждение 4: Величина $\sum (e_i, A e^i)$ не зависит (для данного оператора A) от выбора пары взаимных базисов e_*, e^* .

Перейдем к новой паре взаимных базисов f_*, f^* .

$$\sum_k (f_k, A f^k) = \sum_k (\sum_{i=1}^3 b_{ik} e_i, A (\sum_{j=1}^3 c_{jk} e^j)) = \sum_{k,i,j} b_{ik} c_{jk} (e_i, A e^j) = \sum_{i,j} \delta_i^j (e_i, A e^j) = \sum_{i,j} \delta_i^j (e_i, A e^i) \underset{B^T C = I}{=} \sum_i (e_i, A e^i)$$

Если B - м. перехода от e_* к f_* , а C от e^* к f^* .

Определение: Величина $\sum [e_i, A e^i]$ - **ротация** оператора A . $\sum [e_i, A e^i] = \text{rot } A$

Утверждение 5: Величина $\sum [e_i, A e^i]$ не зависит (для данного оператора A) от выбора пары взаимных базисов e_*, e^* .

Перейдем к новой паре взаимных базисов f_*, f^* .

$$\sum_k [f_k, A f^k] = \sum_k [\sum_{i=1}^3 b_{ik} e_i, A (\sum_{j=1}^3 c_{jk} e^j)] = \sum_{k,i,j} b_{ik} c_{jk} [e_i, A e^j] = \sum_{i,j} \delta_i^j [e_i, A e^j] = \sum_i [e_i, A e^i] \underset{B^T C = I}{=} \sum_i [e_i, A e^i]$$

Если B - м. перехода от e_* к f_* , а C от e^* к f^*

линейности

$B^T C = I$

Замечание: Рассмотрим матрицу линейного оператора A в каком-либо базисе e_* н-ва $\mathbb{R}^3: A = (a_{ij}), A e_i = \sum_j a_{ij} e_j$

1° $a_{ji} = (A e_i, e^j) \Rightarrow A e_i = \sum_j (A e_i, e^j) e_j$. П.а. $\text{div } A = \sum a_{ii} \equiv \text{tr } A$

2° Для нахождения связи $\text{rot } A$ и матрицы A будем считать, что базис e_* , в котором каждая A , является ортонормированным, т.е. $e_* = e^*$.

$$\sum [e_i, A e^i] = \sum [e_i, \sum_j a_{ij} e_j] = \sum_{i,j} a_{ij} [e_i, e_j] = a_{12} e_3 - a_{31} e_2 - a_{13} e_3 + a_{31} e_1 + a_{13} e_2 - a_{23} e_1 = (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})$$

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad [e_2, e_1] = -e_3 \quad [e_3, e_1] = e_2$$

$$[e_1, e_3] = -e_2 \quad [e_2, e_3] = 0 \quad [e_3, e_2] = -e_1$$

$$[e_1, e_3] = -e_2 \quad [e_2, e_3] = e_1 \quad [e_3, e_1] = 0$$

§2. Скалярные векторные поле. Основные понятия и операции.

Скалярное поле в $\mathbb{R}^3$ — скалярная ф-ия, определенная в $\mathbb{R}^3$ (или на каком-либо мн-ве $D \subset \mathbb{R}^3$)
 $u(M): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Векторное поле в $\mathbb{R}^3$ — векторная ф-ия, определенная в $\mathbb{R}^3$ (или на $D \subset \mathbb{R}^3$): $\vec{F}(M): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Понятие дифференцируемость скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 :

рассмотрим $\forall M \in \mathbb{R}^3$: $\vec{M}M_0 = \vec{r}(M) - \vec{r}(M_0) = \Delta \vec{r}$ ($\vec{r}(M)$ и $\vec{r}(M_0)$ — радиус-векторы этих точек) $u(M) - u(M_0) = \Delta u(M_0)$

Определение: Скалярное поле $u(M)$ наз-ют дифференцируемым в т. M_0 , если $\exists \vec{g} \in \mathbb{R}^3$:

(1) $\Delta u(M_0) = (\vec{g}, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|)$, причем $\vec{g}$ зависит от т. M_0 , а величина $\bar{o}(|\Delta \vec{r}|)$ обозначает некоторую скалярную ф-ию $\alpha(\Delta \vec{r}) \cdot \lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta \vec{r})}{|\Delta \vec{r}|} = 0$.

$g(x_1, x_2, x_3): g(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - g(x_1, x_2, x_3) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3 h_3 + \bar{o}(\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2})$ — дифференцируема

Утверждение 1: Вектор $\vec{g}$ в (1) определяется (в рассм. т. M_0) единственным образом.

Пусть $\vec{h}$ (1): тогда $(\vec{g}, \Delta \vec{r}) - \bar{o}(|\Delta \vec{r}|) = (\vec{h}, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|) \Rightarrow (\vec{g} - \vec{h}, \Delta \vec{r}) = \bar{o}(|\Delta \vec{r}|) \Rightarrow (\vec{g} - \vec{h}, \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|}) = \frac{\bar{o}(|\Delta \vec{r}|)}{|\Delta \vec{r}|}$

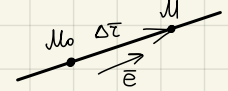
Выбираем т. M так, чтобы $\Delta \vec{r} = \vec{r}(M) - \vec{r}(M_0) \uparrow \uparrow$ некоторому $\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$. Тогда $\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \vec{e}$.

И следовательно, после предельного перехода при $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$: $(\vec{g} - \vec{h}, \vec{e}) = 0$

Рассмотрим в качестве $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$) вектор $\uparrow \uparrow \vec{g} - \vec{h}$. Тогда $(\vec{g} - \vec{h}, \vec{g} - \vec{h}) = 0 \Rightarrow \vec{g} = \vec{h}$

Определение: Вектор $\vec{g}$ — градиент скалярного поля $u(M)$ в т. M_0 : $\vec{g} = \text{grad} u(M_0) = \nabla u(M_0)$ (∇ читается НАБЛА)

Птем самым $\text{grad} u(M_0)$ — это векторное поле, определенное там, где $u(M)$ дифференц.



Утверждение 2: (свойства градиента)

1) $\text{grad}(u \pm v) = \text{grad} u \pm \text{grad} v$, $\text{grad}(cu) = c \cdot \text{grad} u$ ($c = \text{const}$);

2) $\text{grad}(u \cdot v) = u \cdot \text{grad} v + v \cdot \text{grad} u$

3) $\text{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot \text{grad} u - u \cdot \text{grad} v}{v^2}$

4) $\text{grad} F(u) = F'(t) \big|_{t=u} \cdot \text{grad} u$ ($F(t)$ — скалярная ф-ия одного аргумента t)

(2): $u(M) \cdot v(M) - u(M_0) \cdot v(M_0) = (u(M) - u(M_0))v(M) + u(M_0)v(M) - u(M_0)v(M_0) = \Delta u(M_0) \cdot v(M) + \Delta v(M_0) u(M_0) =$

$= \Delta u(M_0)v(M_0) - \Delta v(M_0)u(M_0) + \Delta v(M_0)\Delta u(M_0) = ((\nabla u, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|))v(M_0) + ((\nabla v, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|))u(M_0) + ((\nabla u, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|))((\nabla v, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|)) =$
 $= (v(M_0) \cdot \nabla u + u(M_0) \nabla v, \Delta \vec{r}) + v(M_0) \bar{o}(|\Delta \vec{r}|) + u(M_0) \bar{o}(|\Delta \vec{r}|) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|^2)$